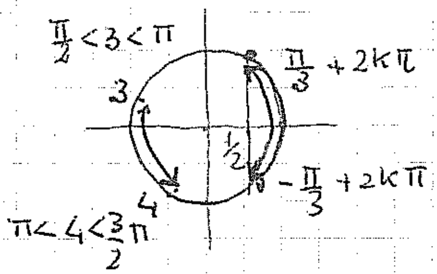
EBI Soluzioni ai quesiti dello scritto del giorno 8 luglio 2010

1 $\begin{cases} \cos x > \frac{1}{2} \\ 3 < x < 4 \end{cases}$



non vi sono soluzioni

Algebricamente:

se $k \leq 0 \Rightarrow x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} < 3$, se $k \geq 1$ $x > -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi > 4$.

2 $z^2 + z + 1 = 0$ $\quad z_{1,2} \in \dfrac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3 Le coordinate di $(1,2)$ nel sistema di riferimento $((3,4),(4,3))$ sono le coppie di numeri (x,y) per cui

$$(1,2) = x(3,4) + y(4,3) \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} 1 = 3x + 4y \\ 2 = 4x + 3y \end{cases} \qquad x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}y$$

$$\frac{6}{3} = 2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{3}y + \frac{9}{3}y$$

$$\frac{2}{3} = -\frac{7}{3}y \qquad y = -\frac{2}{7} \qquad x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\,\frac{2}{7} = \frac{7+8}{21} = \frac{5}{7}$$

$$\left(\frac{5}{7}, -\frac{2}{7}\right)$$

4 a campione $1, 1, 1, 4, 5, 5$ è ordinato

moda 1

mediani $1, 4$

media $1 \cdot \frac{3}{6} + 4\,\frac{1}{6} + 5\,\frac{2}{6} = \frac{17}{6}$

b $\text{Var} = 1 \cdot \frac{3}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{2}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \dfrac{96 \times 6 - 17 \times 17}{36} =$

$$= \frac{125}{36} = 3{,}47\overline{2}$$

$$e_r = \frac{\text{VAR} - 3{,}4}{3{,}4} = 0{,}07\overline{2}\,\frac{10}{34} = 0{,}7\overline{2} \cdot \frac{1}{34} > \frac{7}{340} > \frac{2}{100}$$

$$e_r = \frac{\text{VAR} - 3{,}47}{3{,}47} = 0{,}00\overline{2}\,\frac{100}{347} = 0{,}\overline{2}\,\frac{1}{347} < \frac{3}{3470} < \frac{1}{1000} < \frac{1}{100}$$

5. a Per ogni seme si hanno otto VALORI: A K Q J 10 9 8 7
essendo quattro i semi si hanno $8 \times 4 = 32$ carte.

PROBABILITÀ SU 5 CARTE ESTRATTE DI AVERE 4 ASSI $= \dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} =$

numero casi possibili = numero di scelte di 5 su 32 $= \binom{32}{5}$

numero casi favorevoli = numero di scelte di 4 su 4 × numero di scelte di 1 su 28 $= \binom{4}{4}\binom{28}{1}$

$=$ [DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA] $\dfrac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{1 \cdot \cancel{28}}{\underset{8}{32} \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot \cancel{28}} \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{1}{31 \cdot 29 \cdot 8} =$

$= \dfrac{1}{899 \cdot 8} = \dfrac{1}{7192}$

b Sia S la scommessa in una mano, $10S$ l'eventuale vincita in una mano
il ricavato in una mano è: $9S$ se si vince, $-S$ se si perde
Si considera la variabile aleatoria: $R = \begin{cases} 9S & \text{se si vince} \\ -S & \text{se si perde} \end{cases}$

$\mathbb{P}(R = 9S) = \mathbb{P}(\text{fare un qualsiasi poker}) = p$

$\mathbb{P}(R = -S) = 1 - p$

$\langle R \rangle = \sum v\,\mathbb{P}(R = v) = 9Sp - S(1-p) = 8Sp - S = (8p-1)S$

Le dieci mani si modellizzano con dieci variabili aleatorie
<u>indipendenti</u> distribuite come R

$B = R_1 + R_2 + \dots + R_{10}$ è la variabile aleatoria del bilancio tra vincite e perdite in 10 mani

$\langle B \rangle = \langle R_1 + \dots + R_{10} \rangle = \langle R_1 \rangle + \dots + \langle R_{10} \rangle =$

$= 10 \langle R \rangle = 10(8p-1)S$

è il bilancio medio in 10 mani. La sua percentuale rispetto alla cifra scommessa complessivamente in dieci mani è:

$\dfrac{\langle B \rangle}{10S} \cdot 100\ \% = (8p-1)\ \%$

Si tratta di calcolare $p = \mathbb{P}(\text{fare un qualsiasi poker}) =$

$= \mathbb{P}(\text{o fare poker di } A \text{ o fare poker di } K \text{ o} \dots \text{o fare poker di } 7) =$

[eventi disgiunti] $\mathbb{P}(\text{poker } A) + \mathbb{P}(\text{poker } K) + \dots + \mathbb{P}(\text{poker } 7) =$

[eventi equidistribuiti] $8 \cdot \mathbb{P}(\text{poker } A) = \dfrac{1}{899}$

Quindi il bilancio medio in 10 mani è $\left(\dfrac{8}{899} - 1\right)\% = -\dfrac{891}{899}\% \sim -0{,}9$ rispetto alla scommessa totale

5. c La probabilità di fare un qualsiasi poker

è $\mathbb{P}(\text{poker}A \text{ o poker}K \text{ o} \dots \text{poker}7) =$ [eventi disgiunti]

$= \mathbb{P}(\text{poker}A) + \mathbb{P}(\text{poker}K) + \dots + \mathbb{P}(\text{poker}7) =$ [eventi equidistribuiti]

$= 8\, \mathbb{P}(\text{poker}A) = \frac{1}{899} = p$

Sia $V = \begin{cases} 1 & \text{se si fa poker} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad \mathbb{P}(V=1) = \frac{1}{899}$, $\quad \mathbb{P}(V=0) = 1 - \frac{1}{899} = \frac{898}{899}$

e siano $V_1, V_2, V_3 \dots\dots$ indipendenti distribuite come V

sia N = numero della mano in cui si fa il primo poker

$$\mathbb{P}(N=k) = \mathbb{P}(V_1 = 0 \text{ e } \dots \text{ e } V_{k-1} = 0 \text{ e } V_k = 1) =$$

[indipendenti equidistribuiti] $= \left(\frac{898}{899}\right)^{k-1} \frac{1}{899}$

(distribuzione geometrica)

d Il numero medio di mani per ottenere il primo poker è la media di N

$$\langle N \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(1-p)^{k-1} =$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = -p \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k\right)_{x=p} =$$

$$= -p \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-(1-x)}\right)_{x=p} = -p\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p} = 899.$$

6 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x^2}}$ $\quad f(x) = f(-x) \geq 0$

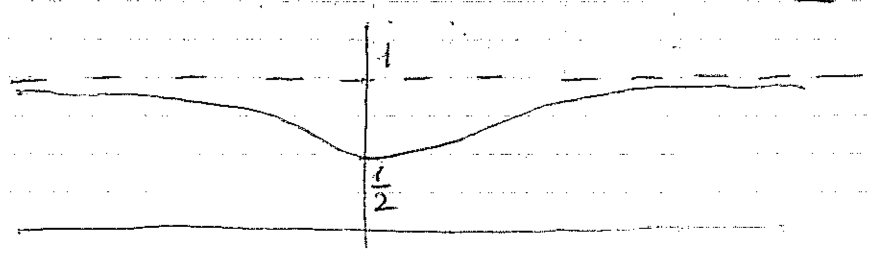
$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0 \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

e^{-x^2} è decrescente per $x \geq 0$ quindi $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$

$f(x) = f(-x)$, quindi $f(x)$ è decrescente per $x \leq 0$

$f(x)$ assume perciò valore minimo per $x=0$: $f(0) = \frac{1}{2}$

f è derivabile



7 $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = 3 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

- Soluzione omogenea: polinomio associato $\lambda^2 + 2\lambda + 3$

radici $\frac{-2 + \sqrt{4-12}}{2}$ $\lambda = -1 + \sqrt{2}i$; $\bar{\lambda} = -1 - \sqrt{2}i$

Soluzioni reali dell'omogenea

$$c e^{t\lambda} + \bar{c} e^{t\bar{\lambda}} = c e^{-t + i\sqrt{2}t} + \bar{c} e^{-t - i\sqrt{2}t} = a e^{-t} \cos\sqrt{2}t + b e^{-t} \sin\sqrt{2}t$$

$c = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} i \in \mathbb{C}$, $(a, b \in \mathbb{R})$

- Soluzione particolare: coefficienti indeterminati

termine noto costante: $p(t) = \alpha$ e radici non nulle
imponendo che sia soluzione si ha la condizione su α

$$p'' + 2p' + 3p = 3$$
$$3\alpha = 3 \qquad \alpha = 1$$

- Soluzioni equazione $z(t) = 1 + a e^{-t} \cos\sqrt{2}t + b e^{-t} \sin\sqrt{2}t$
- Soluzione problema: per trovare a e b vanno imposte alla soluzione generica dell'equazione le condizioni

$z(0) = 1$
$z'(0) = 1$
per facilitarsi i calcoli $z(t) = 1 + c e^{\lambda t} + \bar{c} e^{\bar{\lambda} t}$ $c = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} i$
$z'(t) = \lambda c e^{\lambda t} + \bar{\lambda} \bar{c} e^{\bar{\lambda} t}$

$$1 = z(0) = 1 + c + \bar{c} = 1 + a \iff a = 0$$

$$1 = z'(0) = \lambda c + \bar{\lambda} \bar{c} = 2 \operatorname{Re} \lambda c = 2(\operatorname{Re}\lambda \operatorname{Re} c - \operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im} c) =$$
$$= 2\left(\operatorname{Re}\lambda \cdot 0 - \operatorname{Im}\lambda\left(-\frac{b}{2}\right)\right) = 2\left(-\sqrt{2}\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$$

$$\iff b = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t$$

8 $\int^t \underset{f(s)}{e^{2s}}\underset{g'(s)}{\cos 3s}\, ds = \underset{f(t)}{e^{2t}} \underset{g(t)}{\frac{1}{3}\sin 3t} - \int^t \underset{f'(s)}{2e^{2s}} \underset{g(s)}{\frac{1}{3}\sin 3s}\, ds \cdot \; c =$

$$= \frac{1}{3} e^{2t}\sin 3t - \frac{2}{3}\int^t \underset{f(s)}{e^{2s}} \underset{g'(s)}{\sin 3s}\, ds + c =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t - \frac{2}{3}\Big[\underset{f(t)}{e^{2t}} \underset{g(s)}{(-\frac{1}{3}\cos(3t))} - \int^t 2e^{2s}(-\frac{1}{3}\cos 3s)\, ds\Big] + \tilde{c}$$

$$= \frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t + \frac{2}{9}e^{2t}\cos 3t - \frac{4}{9}\int^t e^{2s}\cos 3s\, ds + \tilde{c}$$

portando al primo membro l'integrale del secondo membro e dividendo i due membri così ottenuti per $1+\frac{4}{9} = \frac{13}{9}$

$$\int^t e^{2s}\cos 3s\, ds = \frac{3}{13}e^{2t}\sin 3t + \frac{2}{13}e^{2t}\cos 3t + \tilde{\tilde{c}}$$

Per ottenere la primitiva che per $t=0$ valga 3 si impone tale condizione per ricavare $\tilde{\tilde{c}}$

$$\frac{3}{13}e^0 \sin 0 + \frac{2}{13}e^0\cos 0 + \tilde{\tilde{c}} = 3 \iff \tilde{\tilde{c}} = 3 - \frac{2}{13} = \frac{37}{13}$$

La primitiva cercata è: $\frac{3}{13}e^{2t}\sin 3t + \frac{2}{13}e^{2t}\cos 3t + \frac{37}{13}$

9 a Per ipotesi $\mathbb{P}(T > d) = e^{-2d}$ se $d>0$, quindi

$$\mathbb{P}(T \leq d) = 1 - \mathbb{P}(T>d) = 1-e^{-2d} \quad \text{se } d>0$$

D'altronde $T>0$ quindi

$$\mathbb{P}(T\leq t) = 0 \quad \text{se } t\leq 0$$

Per cui T ha funzione di ripartizione $\mathbb{P}(T\leq t) = \begin{cases} 1-e^{-2t} & t>0 \\ 0 & t\leq 0\end{cases}$

b Se T avesse densità f, e $\int_{\mathbb{R}} |s| f(s)\, ds < +\infty$ allora

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s f(s)\, ds$$

In effetti $\mathbb{P}(T\leq t)$ è derivabile per $t\neq 0$

con derivata $\frac{d\,\mathbb{P}(T\leq t)}{dt} = \begin{cases} 2e^{-2t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ continua a tratti

per cui si ha $\mathbb{P}(T\leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\,\mathbb{P}(T\leq s)}{ds}\, ds$.

Quindi $f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & t>0 \\ 0 & t<0\end{cases}$ è la densità di T

$$\langle T \rangle = \int^{+\infty} s f(s)\, ds = \int^{+\infty} 2s\, e^{-2s}\, ds = \lim_{t\to\infty}\Big[-te^{-2t} - \frac{e^{-2t}}{2}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$