Elementi di Analisi Matematica II, Anno Accademico 2002-2003, Matematica

G. Albert, A. Briani, V.M. Tortorelli

II foglio di esercizi: V.M. Tortorelli
dal 25 febbraio 2003 al 4 Marzo 2003

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html $\longrightarrow$ El. di An. Mat. I e II A.A. 2002/03

ESERCIZIO n. 1 Risolvere o provare:
$n^n \geq n! \geq 2^n,\ 2^n - 2 \geq n^2,\ n \geq 5;\ 3^n \geq n2^n,\ n \geq 2;$
$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1);\ \sum_{k=1}^n k^2 =?;\ \sum_{k=1}^n k^3 =? = (\sum_{k=1}^n k^2)^2;\ \sum_{k=1}^n 2k-1 = n^2;$
$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};\ (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2,\ a \geq 0;\ (1+a)^n \geq 1+na,\ a \geq -1;$

ESERCIZIO n. 2 Calcolare estremo superiore, inferiore, e specificare se sono valori massimi o minimi dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$:

$]0;1],\ [1;4[\cap(]0;2[\cup]3;5]),\ \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left[\frac{1}{n};1-\frac{1}{n}\right];\ \bigcap_{n\in\mathbf{N}}\left]\frac{1}{n};n\right[,\ \bigcup_{m\in\mathbf{N}}\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\left]\frac{1}{n+m};m+n\right[,$

$\{x:\ |x^2+1| < |x-3|-1\},\ \{x:\ |x^6-1| \leq -x^3+1\},\ \{x:\ \frac{x+1}{|x-2|} - 2x > 0\},$

$\{x:\ \frac{x+1}{|x-2|} - 2|x| > 0\},\ \{x:\ \log x^2 \geq \log(2x-1)\} \cap \mathbf{Q},\ \{x:\ \log_x(2x-1) \geq 2\}$

$\bigcap_{y\in\mathbf{R}}\{x:\ |x+y|+y \leq 2\};\ \bigcup_{y\in\mathbf{R}}\{x:\ |x+y|+y \leq 2\};$

ESERCIZIO n. 3 Calcolare estremo superiore, inferiore, e specificare se sono valori massimi o minimi delle seguenti funzioni e successioni a valori in $\mathbf{R}$:

$7n^3 - n^4,\ n \in \mathbf{N};\ 7n^6 - n^8,\ n \in \mathbf{N};\ 7x^6 - x^8,\ x \in \mathbf{R};\ \sin\frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \sqrt{n} - [\sqrt{n}],\ n \in \mathbf{N};$

$\frac{x^6+x^4+1}{x^4+2x^2-3},\ x^4+2x^2-3 \neq 0;\ \frac{n^6+n^4+1}{n^4+2n^2-3},\ n \in \mathbf{N}\ n^4+2n^2-3 \neq 0;\ (x^2+1)e^{-(x^2-1)},\ x \in \mathbf{R};$

$\frac{n+1}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \ \frac{2m}{m^2+1},\ m \in \mathbf{Z};\ \ (-n)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \ n + \frac{1001}{n},\ n \in \mathbf{N};\ \ x^2 + \frac{1001}{x^2+1},\ x \in \mathbf{R}$

ESERCIZIO n. 4 Calcolare estremo superiore, inferiore, e specificare se sono valori massimi o minimi delle seguenti funzioni e successioni a valori in $\mathbf{R}$:

$n\cos m\pi - \frac{3}{2+n},\ m,\ n \in \mathbf{N};\ \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2},\ \ m,\ n \in \mathbf{N};\ \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2},\ xy > 0;\ \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{x^2y^2z^2},\ xyz > 0$

$\left|\frac{|z|-1}{z-1}\right|,\ z \in \mathbf{C}\ z \neq 1;\ \frac{|z+w|^2}{|zw|},\ z,\ w \in \mathbf{C};\ \left|\frac{z+1}{z-1}\right|,\ z \in \mathbf{C}$ e $\left|e^{z+2} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

$\sup\{|u(x)-u(0)|; x \in [0;1]\}$, al variare di u tra le funzioni per cui $\sup\left\{\left|\frac{du}{dx}(x)\right|; x \in [0;1]\right\} = 1$

$\int_0^1 |u(x)|dx$ al variare di u tra le funzioni per cui $\sup\{|u(x)|; x \in [0;1]\} < 1$

NOTAZIONE:

$A+B=\{x\in\mathbf{R}:\ \exists a\in A,\ b\in B\ x=a+b\}$, $\lambda A=\{x\in\mathbf{R}:\ \exists a\in A\ x=\lambda a\}$.

ESERCIZIO n. 5 Provare che:

a - se $A\subseteq B$ allora $\sup A\leq\sup B$ e $\inf B\leq\inf A$;

b - $\sup A\cup B=\max\{\sup A,\sup B\}$, $\inf A\cup B=\min\{\inf A,\inf B\}$, $\sup\bigcup_{i\in I}A_i=\sup_{i\in I}\sup A_i$;

c - $\sup A+B=\sup A+\sup B$, $\sup -A=-\inf A$, $\sup\gamma^2A=\gamma^2\sup A$;

d - se $f:I\to\mathbf{R}$, $g:I\to\mathbf{R}$ allora: $\sup_{x,y\in I}f(x)+g(y)=\sup_{x\in I}f(x)+\sup_{x\in I}g(x)\geq\sup_{x\in I}f(x)+g(x)$.

Si provi che la diseguaglianza è necessaria, e si trovi e provi un analogo enunciato per l'estremo inferiore;

ESERCIZIO n. 6

a - Se $0\leq x$ e $\forall\varepsilon>0 x\leq\varepsilon$ allora $x=0$.

b - Ogni sottogruppo additivo G di $\mathbf{R}$ o è un sottoinsieme denso o ha un minimo elemento positivo $g_0>0$, e tale g_0 genera G, cioè $G=g_0\mathbf{Z}$.

c - Due numeri reali a, b hanno rapporto irrazionale se e solo se $a\mathbf{Z}+b\mathbf{Z}$ è un sottogruppo denso di $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 7 **PRINCIPIO DI INDUZIONE** Partendo dagli assiomi di $\mathbf{R}$ ed da quello dell'esistenza di intersezioni infinite si identifica l'insieme dei numeri naturali come segue: $\mathbf{N}=\bigcap\{A\subseteq\mathbf{R}:\ 1\in A,\ x\in A\Rightarrow x+1\in A\}$.

a - Si provi con questa definizione di $\mathbf{N}$ che se $A\subseteq\mathbf{N}$, $1\in A$, $x\in A\Rightarrow x+1\in A$ allora $A=\mathbf{N}$.

b- Si dimostri che ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ha minimo.

ESERCIZIO n. 8

a - Si provi che per ogni $n\in\mathbf{N}$ la funzione $x\mapsto x^n$, $x\geq 0$ è bigettiva da $\mathbf{R}^+$ in se.

b - Detta $y\mapsto y^{\frac{1}{n}}$ la sua inversa che $(y^m)^{\frac{1}{n}}=(y^{\frac{1}{n}})^m$. Il comune valore è indicato con $y^{\frac{m}{n}}$.

ESERCIZIO n. 9 Dato $n\in\mathbf{N}$ e considerati $a_1,\dots a_n$ numeri reali non negativi si consideri la diseguaglianza:

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ \geq\ \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$$

a - Si provi che se vale per n vale per $2n$, che se vale per n vale per tutti i suoi predecessori e si concluda provando che è vera per ogni $n\in\mathbf{N}$.

b - Fissato n per quali $a_1,\dots a_n$ vi è eguaglianza.

ESERCIZIO n. 10 Fissato $x\in\mathbf{R}$, si provi (eventualmente considerando i risultati dei due precedenti esercizi) che la successione $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ è crescente per $n\geq x$, che $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente, e quindi che la prima è limitata superiormente.