Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2005-2006
Laurea specialistica in Informatica
V.M. Tortorelli
I prova scritta finale, 6 giugno 2006

I PARTE: si dia la risposta alle seguenti domande senza giustificazione:

1- Si considerino gli spazi normati $A = C([0,1], \mathbf{R})$, $|f|_A = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$ e $B = C^1([0,1], \mathbf{R})$, $|f|_B = \max_{0\leq t\leq 1} |g(t)| + \max_{0\leq t\leq 1} |g'(t)|$.
Si calcoli la norma dell'operatore lineare $F : f \in A \mapsto F[f] = g \in B$ definito da

$$g(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt$$

R.: $\mathbf{\frac{3}{2}}$. Norma di $F = \sup_{|f|_A=1} |F[f]|_B =$
$= \sup_{|f|_A=1} \left(\max_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt \right| + \max_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^x f(s)ds \right| \right)$
$\max_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds \right) dt \right| + \max_{0\leq x\leq 1} \left| \int_0^x f(s)ds \right| \leq$
$\max_{0\leq x\leq 1} \int_0^x \left(\int_0^t |f(s)|ds \right) dt + \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^x |f(s)|ds \leq$
poichè $|f| \leq 1$
$\leq \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^x \left(\int_0^t ds \right) dt + \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^x ds = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, poichè tale valore è dato dalla funzione ammissibile costantemente eguale ad 1 è quello cercato.

2 - Si calcoli il limite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\log\cos xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$.

R.: **0**. Si ha $\cos u = 1 + O(u^2)$, $\log(1 + O(u^2)) = O(u^2)$. Inoltre detta r la distanza dall'origine si ha: $r^6 \geq u^2 = x^2y^2z^2$, $x^4+y^4+z^4 \geq \frac{r^4}{4}$. Per cui il limite è del tipo $\dfrac{O(r^6)}{O(r^4)}$, $r \to 0$.

3- Si dica se la successione di funzioni $f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy$ converge uniformemente per $x \geq 0$.

R.:**SI**. Poichè $\frac{e^{-xy}}{1+y^2} \leq \frac{1}{1+y^2}$ per $x \geq 0, y \geq 1$, è integrabile su $[1, \infty[$. Quindi si ha p.o. $x \geq 0$ che $f_n(x) \to \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy$, $n \to \infty$. Si deve mostrare $\sup_{x\geq 0} \left| \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy - f_n(x) \right| \to 0$.
Infatti $\sup_{x\geq 0} \left| \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy - f_n(x) \right| = \sup_{x\geq 0} \int_n^\infty \frac{e^{-xy}}{1+y^2}dy \leq \sup_{x\geq 0} \int_n^\infty \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{2} - \mathrm{artan}(n)$. .

4- Si consideri $f(x,y) = e^{x+y} - xy$: si calcoli $\frac{\partial x}{\partial y}(1)$ nell'intorno del punto $(1,1)$.

R.:$\mathbf{-1}$. Poichè $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \neq 0$ per il teorema del Dini $f(x,y) = f(1,1)$ è in un intorno di $(1,1)$ un grafico derivabile rispetto la variabile y. Derivando in y la relazione $f(x(y), y) = f(1,1)$, con $x(1) = 1$, si ha $(1 + x')e^{x+y} - x - yx' = 0$ e calcolando per $y = -1$ si ottiene $\frac{dx}{dy}(1) = 1$

5- Si trovino i punti critici di $f(x,y,z) = x^2(1-y)^2(z+\frac{1}{2})^2$ e se ne determini la natura.

R.:**I piani coordinati: punti di minimo**. Poiche $\nabla f = 0$ se e solo se $f = 0$ essendo $f \geq 0$ i punti critici sono di minimo: gli zeri di f. Ma f si annulla se e solo se o $x = 0$ o $y = 1$ o $z = -\frac{1}{2}$.

6- Si calcolino i valori di massimo e minimo di $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ per $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 1$.

R.:**1**, $\mathbf{\frac{1}{2}}$. Il vincolo è $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ quindi la funzione su di esso è $x^2 + \frac{1}{2}$. Sul vincolo x varia tra $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi il valore minimo è $\frac{1}{2}$ e quello massimo è 1

Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2005-2006
Laurea specialistica in Informatica
V.M. Tortorelli

I prova scritta finale, 6 giugno 2006

II PARTE: si risolvano i seguenti problemi dando in modo esauriente le opportune giustificazioni:

Si consideri lo spazio normato $A = C([0,1], \mathbf{R})$, $\|f\| = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$.

Detto $F : f \mapsto F[f] = g$ l'operatore definito da $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{f(t)} dt$, si dimostri che:

a- F trasforma elementi di A in elementi di A

b- F è continuo

c- F è differenziabile in $f(x) \equiv 0$, determinando l'operatore lineare $d_0 F$ mediante le derivate direzionali di F e considerando quindi lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale in una variabile.

Soluzione

a- Data $t \mapsto f(t)$ continua su $[0;1]$ la composizione con l'esponenziale $t \mapsto e^{f(t)}$ è continua e quindi integrabile su $[0;1]$. La funzione integrale di una funzione integrabile è continua.

b- Si deve mostrare, *fissata* f, che
$\max_{x\in[0;1]} \left| \int_0^x e^{f(t)} dt - \int_0^x e^{\varphi(t)} dt \right| \to 0$ se $\max_{x\in[0;1]} |f(x) - \varphi(x)| \to 0$. Si ha
Conviene vedere $F[f]$ come composizione dell'operatore di composizione $C : f \mapsto e^f$ con l'esponenziale e l'operatore lineare $I : \psi \mapsto \int_0^x \psi(t) dt$ che ad una funzione associa la sua funzione integrale, e mostrare che ognuno di questi due operatori è continuo per la norma.
Per l'operatore lineare la continuità segue direttamente da $\max_{[0;1]} \int_0^x |\psi(t)| dt \le \max_{[0;1]} |\psi|$
Per C è un fatto generale che la composizione con una funzione continua dia un operatore continuo rispetto alla norma uniforme. Si pone $C[f](x) = e^{f(x)} = \Phi(f(x))$.
Fissata f, Φ è u.c. su $Q = [\min f - 1; \max f + 1]$, cioè:
dato ε vi è $\delta < 1$ per cui $|\Phi(u) - \Psi(v)| \le \varepsilon$ per $u,\ v \in Q$ e $|u - v| \le \delta$.
Quindi per ogni φ per cui $\max_{[0;1]} |f - \varphi| = |f - \varphi|_A \le \delta < 1$ si ha da una parte che l'immagine di φ sta in Q e quindi che per ogni
$x \in [0;1]$: $|\Phi(f(x)) - \Phi(\varphi(x))| \varepsilon$ cioè $\max_{[0;1]} |\Phi(f(x)) - \Phi(\varphi(x))| = |C[f] - C[\varphi]|_A \le \varepsilon$

c- Calcolando formalmente la derivata per $\lambda = 0$ della funzione $u(\lambda) = \int_0^x e^{\lambda\varphi(t)} dt = F[\lambda\varphi](x)$ si otterrebbe $u'(0) = \int_0^x \varphi(t) dt$.
Quindi il candidato $d_0 F$ è l'operatore lineare su A , si è già dimostrato continuo rispetto la norma uniforme, $\varphi \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$.
Poichè $F[0]$ è l'identità su $[0;1]$ si tratta di verificare che
$\max_{[0;1]} \left| \int_0^x e^{\varphi(t)} dt - x - \int_0^x \varphi(t) dt \right|$ è infinitesimo di ordine superiore a $\max_{[0;1]} |\varphi|$
Infatti $\max_{[0;1]} \left| \int_0^x e^{\varphi(t)} dt - x - \int_0^x \varphi(t) dt \right| = \max_{[0;1]} \left| \int_0^x \left(e^{\varphi(t)} - 1 - \varphi(t) \right) dt \right| \le$
$\max_{[0;1]} \int_0^x \left| e^{\varphi(t)} - 1 - \varphi(t) \right| dt = \max_{[0;1]} \int_0^x \frac{1}{2} \varphi^2(t) e^{\xi(t)} \le \max_{[0;1]} \varphi^2 \int_0^1 \frac{1}{2} e^{\xi(t)} dt$
poichè $\xi(t)$ è compresa tra 0 e $\varphi(t)$ che è da considerarsi piccola in norma uniforme si può assumere che ξ sia minore di 1 per cui
$\max_{[0;1]} \left| \int_0^x e^{\varphi(t)} dt - x - \int_0^x \varphi(t) dt \right| \le \max_{[0;1]} \varphi^2 \frac{e}{2}$