Matematica, Anno Accademico 2009-2010, Biotecologie

CALCOLO DI INTEGRALI IN UNA VARIABILE: V.M. Tortorelli, 25 marzo 2010

DEFINIZIONE: Una funzione $x \mapsto F(x)$ definita su un intervallo I si dice *primitiva sull'intervallo* di una funzione $x \mapsto f(x)$ se: F è derivabile su I e $F' = f$ su I. La *famiglia delle primitive di* f su un intervallo si indica con $\int^x f$.

- Due primitive *su un intervallo* differiscono per una costante, avendo appunto la stessa derivata: basta applicare il teorema di Lagrange alla loro differenza che ha derivata nulla. Dal teorema di Lagrange e dalla definizione di integrale si ha:

TEOREMA Se $f = F'$ su $[a,b]$ ed è integrabile allora $\int_{[a,b]} f(y)dy = F(b) - F(a)$.

Ma quali funzioni sono sia derivate che integrabili su un intervallo? Risposta parziale:

TEOREMA [FONDAMENTALE DEL CALCOLO : area calcolata con le primitive]

Se f è continua su $[a;b]$ allora oltre ad essere integrabile:

i- La funzione integrale $I(x) = \int_{[a,x]} f(y)dy$ è una primitiva di f per $x \in [a,b]$

ii- per ogni altra F primitiva di f su $[a;b]$ si ha: $\int_{[a,b]} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

- [PRIMITIVE DI BASE]

$f(x)$	$\int^x f = F(x)$
e^x	$e^x + a$
$f = x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$a + \log x$ se $x > 0$ $b + \log(-x)$ se $x < 0$
$\cos x$	$\sin x + a$
$\sin x$	$-\cos x + a$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$a_k + \tan x$ se $x \in]k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$a + \mathrm{artan}x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$a + \mathrm{arsin}x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$a + \log(x + \sqrt{1+x^2})$ l'inversa di arcosenoiperbolico: $\mathrm{arsinh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
$\log x$	$a + x \log x - x$.
$\mathrm{arsin}x$	$a + x\mathrm{arsin}x + \sqrt{1-x^2}$
$\mathrm{artan}x$	$a + x\mathrm{artan}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

Teorema 3. - CAMBIAMENTO DI VARIABILE ORIENTATO, SOSTITUZIONE Sia $\Phi : y \in [a,b] \mapsto x = \Phi(y) \in [\alpha, \beta]$ con *derivata continua* ed f continua. Allora:

$$\mathrm{segno}(\Phi(b) - \Phi(a)) \int_{[\min\{\Phi(a),\Phi(b)\},\max\{\Phi(a),\Phi(b)\}]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(y))\Phi'(y)dy$$

Definizione Per funzioni di una variabile si può facilmente parlare di integrali *orientati* considerando un senso di percorrenza del segmento ove si integra e cambiando segno all'integrale. Per questo se $a < b$ si usano le seguenti notazioni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx \ , \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Quindi la precedente formula si scrive $\boxed{\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\Phi(y))\Phi'(y)dy}$

Osservazione -Dimostrazione: l'integranda ha primitiva $F(\phi(y))$, ove $F'(x) = f(x)$.

- Intuitivamente l'integrale orientato va interpretato non come area ma come lavoro del "campo di forze" $f(x)$ lungo il cammino $y \mapsto \Phi(y) = x$ che percorre $[\min\{\Phi(a), \Phi(b)\}, \max\{\Phi(a), \Phi(b)\}]$, ove y è il tempo: il lavoro è negativo se lo spostamento 'infinitesimo' $dx = \frac{d\Phi}{dy}dy$ è opposto ad f.

Si elencano i principali metodi per il calcolo delle primitive e degli integrali:

- [SOSTITUZIONE] *regola della catena* $F(x) = G(t(x))$: $f(x) = \frac{dG}{dt}(t(x))\frac{dt}{dx}(x)$, $t = t(x)$:

  [SOSTITUZIONE INVERSA] $G(t) = F(x(t))$: $f(x(t)) = \frac{dG}{dt}(t)\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^{-1}$, $x = x(t)$, $dx = \frac{dx}{dt}(t)dt$ per avere la risposta bisogna quindi trovare l'inversa di $t \mapsto x(t)$:

- [PARTI] *derivata di un prodotto* $F' = G'H = (GH)' - GH'$

- [RAZIONALI SEMPLICI]

PROPOSIZIONE - Ogni polinomio reale in una variabile si esprime come prodotto di fattori del tipo: a, $(x-b)^n$, $((x-c)^2+d^2)^m$, ove i b sono le radici reali, e la somma degli n e dei $2m$ il grado del polinomio.

- Quindi un rapporto di polinomi, con denominatore di grado maggiore, si scrive come somma di addendi dei seguenti tipi:

$$a,\quad \frac{a}{(x-b)^n},\quad \frac{a}{((x-c)^2+d^2)^m},\quad \frac{ax}{((x-c)^2+d^2)^n}$$

quindi per calcolare le primitive di rapporti di polinomi basta saper calcolalare le primitive di funzioni di questo tipo ed eventualmente saper fare divisioni tra polinomi.

Per il calcolo delle primitive di funzioni di questo tipo ci si riduce mediante una cambiamento di variabile affine al calcolo delle seguenti primitive

$$\frac{1}{x^n} \mapsto \begin{cases} \begin{cases} \log x + a & x>0 \\ \log(-x)+b & x<0 \end{cases} & n=1 \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + a & n>1 \end{cases} \qquad \frac{x}{(x^2+1)^n} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+x^2)+a & n=1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + a & n>1 \end{cases}$$

$$I_1 =: \int^x \frac{1}{1+x^2} \mapsto \mathrm{artan}x + a,$$

$$I_n =: \int^x \frac{1}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \int^x \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = I_{n-1} - \left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right) =$$
$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \quad n>1$$

PRINCIPALI COMPORTAMENTI DI FUNZONI NON LIMITATE E DI INTEGRALI SU SEMIRETTE

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty \ , \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}dx = -\lim_{c\to 0, c>0} \log c = +\infty$$

per $0<a<1$ si ha $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-a}[c^{1-a}-1] = +\infty$

per $0<a<1$ si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx = \lim_{c\to o, c>0} \frac{1}{1-a}[1-c^{1-a}] = \frac{1}{1-a} < +\infty$

per $a>1$ si ha $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-a}[c^{1-a}-1] = \frac{1}{a-1} < +\infty$

per $a>1$ si ha $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx = \lim_{c\to o, c>0} \frac{1}{1-a}[1-c^{1-a}] = +\infty$

Analogamente per infiniti meno elementari, per esempio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = [t=\log x] \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}dt =$

$$\int_0^2 \frac{1}{t}dt + \int_2^{+\infty} \frac{1}{t}dt = \lim_{c\to 0, c>0}[\log 2 - \log c] + \lim_{d\to+\infty}[\log d - \log 2] = +\infty + \infty$$

CONFRONTO ASINTOTICO PER LA SOMMABILITÀ Dovendo riconoscere se una funzione f integrabile in senso generalizzato è sommabile o meno spesso non è comodo, o non è possibile, calcolare la primitiva.

Piuttosto che calcolare la primitiva dell'integranda si usa la monotonia dell'integrale confrontando f con una funzione g di cui si sa calcolare la primitiva:

- se si sospetta che f sia sommabile basta trovare g per cui $g(x) \geq |f(x)|$: si avrà quindi $+\infty > \int g dx \geq \int |f| dx$

- se si sospetta che f non sia sommabile basta trovare g per cui $0 \leq g(x) \leq |f(x)|$: $+\infty = \int g dx \leq \int f dx$

D'altronde queste diseguaglianze non occorre siano verificate in tutto il dominio ma solo sulle semirette e negli intorni dei punti in cui f è illimitata. Per esempio si possono usare i limiti, si esemplifica per il comportamento a $+\infty$ essendo le osservazioni del tutto analoghe negli intorni dei punti in cui f sia illimitata:

- se g è sommabile e $|f| = O(g)$ per $x \to +\infty$ allora f sarà sommabile su qualche semiretta illimitata superiormente. In particolare se $f/g \to L \neq \infty$ per $x \to +\infty$

- se invece $g \geq 0$ non è sommabile e $g = O(f)$ per $x \to +\infty$ allora f non sarà sommabile su ogni semiretta illimitata superiormente. Per esempio se $f/g \to L \neq 0$ anche $+\infty$ per $x \to +\infty$.

INTEGRALI E SERIE - Data una successione a_n, $n \in \mathbf{N}$ il limite della serie ad essa associata $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ può esser vista come integrale della funzione costante a tratti

$$\varphi(x) = a_n \text{ per } n \leq x < n+1: \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;=\; \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

- Ciò permette studiando la sommabilità di φ o la sua integrabilità in senso improprio di avere informazioni sulla convergenza o meno della serie.

- Le regole di integrazione delle funzioni fondamentali danno quindi immedite informazioni sulla convergenza o meno di molte serie con termini a_n non negativi. Per esempio:

$$\sum \frac{1}{n} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \to +\infty} \log c = +\infty$$

per $0 < a < 1$ si ha

$$\sum \frac{1}{n^a} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{c^{a-1}} - 1 \right] = +\infty$$

per $a > 1$ si ha

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^a} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^a} dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{(c-1)^{a-1}} - 1 \right] = \frac{1}{a-1} < +\infty$$

- Viceversa partendo da una funzione $f(x)$ e confrontandola con funzioni costanti su tratti, di lunghezza costante, se si hanno informazioni sulla serie date dagli integrali di tali funzioni costanti a tratti si ottengono informazioni sull'integrale di f. Per esempio

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n \geq 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^\pi \frac{|\sin(x + n\pi)|}{x + n\pi} dx \geq$$

$$\geq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin(x+n\pi)| dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin x| dx = c \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} = +\infty$$

- *Criterio di Leibniz serie con termini a segni alterni:* Un criterio di facile memorizzazione per lo studio di serie non a termini di segno costante è il seguente

- se la successione b_n è non negativa
- se è decrescente $b_{n+1} \leq b_n$
- se è inifinitesima $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$

allora

la serie $b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge (è di Cauchy: $0 \leq |\sum_M^N (-1)^n b_n| \leq b_M$)

In altri termini una serie a termini a_n di segno alterno, i cui valori assoluti siano decrescenti ed infinitesimi converge ($a_n = (-1)^n b_n$.)

Questo permette di dire che esiste l'integrale in senso improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (esercizio).

LUNGHEZZA DI UNA CURVA ED INTEGRAZIONE SU CURVE

Lunghezza - Si dice *lunghezza di un cammino* $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ continuo

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup\{\sum_{i=0}^{N-1} dist(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : \ a = t_0 < t_1 < \dots t_N = b\}$$

• Se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$, $h : [c;d] \to [a;b]$ continua, monotona surgettiva allora $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\varphi)$: la lunghezza di un percorso non cambia percorrendolo in modo diverso.

NOTA: intuitivamente la lunghezza definita non corrisponde alla misura dell'immagine ma alla *misura del percorso fatto.* Per cammini che si autointersecano in un numero finito di punti dá proprio una misura dell'immagine.

Definizione Una funzione di una variabile si dice *continua a tratti* su un intervallo se vi è una suddivisione di questo in intervalli chiusi su ognuno dei quali la funzione sia continua.

Una funzione si dice C^1-*tratti* se vi è una suddivisione di questo in intervalli chiusi su ognuno dei quali la funzione sia continua e derivabile con derivata continua.

Teorema 4 Se $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ è continua e C^1 a tratti $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots \gamma_n'(t)^2}dt$
Definizione La variabile $\mathcal{L}(t) = \int_a^t |\gamma'(s)|ds$ si dice parametro di lunghezza d'arco, $d\mathcal{L}$ intuitivamente è la lunghezza del tratto infinitesimo lungo la curva immagine del cammino.
Definizione- [INTEGRAZIONE NON ORIENTATA, DI FUNZIONI: LUNGHEZZA CON MOLTEPLICITA'] Se γ è un cammino C^1 a tratti in $\mathbf{R}^n$ e g una funzione continua dall'immagine di γ a valori reali, si definisce:

$$\int_\gamma g d\mathcal{L} = \int_a^b g(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_a^b g(\gamma(t))\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots \gamma_n'(t)^2}dt$$

Definizione Se γ è un cammino derivabile in t_0 con $\gamma'(t_0) \neq 0$ si definisce la direzione $\tau(\gamma(t_0))$ tangente in $\gamma(t_0)$ *all'istante* t_0 come il vettore unitario

$$\tau = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$

- Se γ non è iniettiva si possono avere diverse tangenti in istanti diversi nello stesso punto.

Definizione [INTEGRAZIONE ORIENTATA, DI VETTORI: LAVORO] Se γ è un cammino C^1 a tratti in $\mathbf{R}^n$ e V una trasformazione continua dall'immagine di γ in $\mathbf{R}^n$, si definisce il lavoro:

$$\int_\gamma V = \int_a^b V(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)dt = \int_a^b V_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)dt + \dots \int_a^b V_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)dt$$

Osservazione si ha $\displaystyle\int_\gamma V = \int_\gamma V \bullet \tau \ d\mathcal{L}$ nei tratti ove la velocità è non nulla.

Teorema 5 - L'integrale di una funzione lungo un cammino *non dipende* ne dal *senso di percorrenza* ne dall'*intensità delle velocità di percorrenza* se si hanno gli *stessi tratti* di andata e ritorno, ovvero:
se $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ con h monotona, continua e surgettiva allora: $\boxed{\int_\gamma g d\mathcal{L} = \int_\varphi g d\mathcal{L}}$

- L'integrale di una vettore lungo un cammino *non dipende* da come esso è percorso *tout-court* avendo gli stessi punti iniziali e gli stessi punti di arrivo, ma *dipende* invece dal *verso di percorrenza*, ovvero:
se $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ e $\gamma(t) = \varphi(h(t))$ con h continua e $\gamma(a) = \varphi(\alpha)$, $\gamma(b) = \varphi(\beta)$

$$\boxed{\int_\gamma V = \int_\varphi V}$$

mentre se $\gamma(a) = \varphi(\beta)$, $\gamma(b) = \varphi(\alpha)$ allora

$$\boxed{\int_\gamma V = -\int_\varphi V}$$

ALCUNE FORMULE NOTEVOLI

Si riportano alcune formule notevoli che riguardano anche la nozione di area di una supeficie che si può considerare a livello intuitivo.

- Baricentro di una regione $A \subset \mathbf{R}^n$ di misura non nulla: $\vec{b} = (b_1, \ldots b_n) = \dfrac{1}{m(A)} \displaystyle\int_A \vec{x} dx_1 \ldots dx_n$
- Baricentro di una curva γ o superficie Φ in forma parametrica
$$(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\mathcal{L}(\gamma)} \int_\gamma (x, y, z) d\mathcal{L},\ (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\text{Area}(\Phi)} \int_\Phi (x, y, z) dVol_2$$
- Integrali nel piano con coordinate polari $(x, y) = \Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
$$\int\int f(x, y) dxdy = \int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$
- Integrali nello spazio con coordinate cilindriche $(x, y, z) = \Phi(r, z, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$
$$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi dz$$
- Integrali nello spazio con coordinate sferiche $(x, y, z) = \Phi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)$
$$\int\int\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta$$

- Volume del solido generato dalla rotazione di una porzione piana "tutta di un pezzo" attorno ad una asse complanare che non la interseca

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(distanza media dall'asse di rotazione)

=

(area porzione piana)(angolo rotazione)(coordinata del baricentro della regione piana ortogonale all'asse)

=

(area porzione piana)(lunghezzza arco percorso del baricentro)

DIM caso in cui l' asse di rotazione è l'asse $x = 0$, $y = 0$, e D è nel piano $y = 0$. Sia D_α il solido ottenuto ruotando D di α. $vol(D_\alpha) = \int_{D_\alpha} dxdydz =$ coordinate cilindriche $\int_{D\times[0;\alpha]} r dr d\varphi dz =$ iterazione $\int_0^\alpha \left(\int_D r dr dz\right) d\varphi = m(D) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m(D)} \int_D r dr dz$

- Area superficie generata dalla rotazione di una curva piana attorno ad una asse complanare che non la interseca

=

(lunghezza curva)(lunghezza arco descritto dal baricentro della curva)

CASI PARTICOLARI

volume di rotazione attorno all'asse delle x del sottografico di $y = f(x) \geq 0 = \frac{\alpha}{2} \cdot \int f^2(x) dx$

volume di rotazione attorno all'asse delle y del sottografico di $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b], a \geq 0$ $= \alpha \int_a^b x f(x) dx$

area di rotazione attorno all'asse delle x del grafico di $y = f(x) \geq 0 = \alpha \int f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

area di rotazione attorno all'asse delle y del grafico di $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b], a \geq 0 =$ $\alpha \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$