Matematica, Anno Accademico 2009-2010, Biotecnologie
V.M. Tortorelli

esercizi su limiti derivate e trasformazioni tra piano e spazio
dal 22 febbraio al 11 marzo 2010

ESERCIZIO n. 1 Un punto si muove su una retta in modo che la distanza dal punto iniziale è proporzionale al quadrato del tempo percorso. In due minuti percorre dodici metri. Si trovi la velocità media: a- nei primi cinque minuti, b- tra il quarto minuto e il settimo. Si calcoli la velocità istantanea al settimo minuto.

ESERCIZIO n. 2 a- Calcolare le derivate delle seguenti funzioni
$\sin(100 \cdot x)$, $e^{x^{100}}$, $\log \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$, $\tan x^2 + \tan^2 x$, $\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$, $\sin^2 \cos 3x^3$, $\frac{\text{arsin x}}{\text{arcos x}}$, x^x, $(x \log x)^{\sin \sqrt{x}}$, $\log_x(2^x - x^2)$
b- Calcolare $f'(x^2)$ se $f(x) = x^3$, e se $g(x) = f(x^2)$ calcolare $g'(x)$.
c- Calcolare nel punto di coordinate $(1, y)$ la derivata rispetto alla variabile y della $f(x, y) = x^{x^{x^y}} + \log x(\text{artan}(\text{artan}(\text{artan}(\sin(\cos(xy) + \log(x + y))))))$.
d-Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni nei punti $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ rispetto ad ognuna delle variabili:
$e^{x^4 y^2 z} - xz\sin(xy) - 1$; $\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}$; $(x^2 + z^2)\log(x^2 + y^2)$; $\frac{x \sin zy}{200+zy\sin x}$; $\frac{x^2y^2}{x^2+y^4+1}$;
calcolare quindi le funzioni derivate rispetto alla prima variabile delle stesse funzioni.

ESERCIZIO n. 3 a- Si trovi la tangente nel punto $(1, 1)$ dell'insieme di punti del piano definito da $x^7 + y^7 - 2 = 0$
b- Si trovino le tangenti nel punto $(0, 0)$ dell'insieme del piano definito da $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.
c- Si trovi l'angolo di incidenza in $(1, 1)$ tra le due curve $y = x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

ESERCIZIO n. 4 a- Si provino le relazioni $\text{arsin } x + \text{arcos } x = \frac{\pi}{2}$, $|\text{artan}x + \text{artan}\frac{1}{x}| = \frac{\pi}{2}$.
b- Si provi che per $x \geq 0$ si ha $\text{artan } x \geq \frac{x}{1+x}$, $2x\text{artan } x \geq \log(1 + x^2)$.

ESERCIZIO n. 5 Si studino i grafici delle seguenti funzioni
$|x^3-1|+3$, $||x|-3|+1$, $x|x^2-1|$, $(x-2|x|)^2$, $x+\cos x$, $\log(x+\sqrt{1 + x^2})$, $\frac{1+3e^x}{\sqrt{4+5e^{2x}}}$, $(*)$ $\text{arsin}\frac{2x}{1+x^2}$. $\frac{\log \cos x}{\sin x}$ si studi altresì la derivabilità della funzione ottenuta estendendo la funzione data con i valori limite agli estremi degli intervalli di definizione.

ESERCIZIO n. 6 a- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
b- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
c- Si studi la derivabilità della funzione definita da $x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$ se $x \neq 0$, e nulla per $x = 0$.
d - Per quali numeri a, b la funzione definita

$$\begin{array}{ll} \text{artan}x & x \leq 1 \\ a\cos \pi x \; + \; b \sin \pi x & x > 1 \end{array}$$

è derivabile con derivata continua?
* e- Sia $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Si provi che esiste $f'(0)$ ed è *strettamente positiva*, ma la funzione non è crescente in nessun intervallo contenente 0.

ESERCIZIO n. 7 a- Tra i triangoli rettangoli di ipotenusa di lunghezza assegnata quali hanno area massima?
b- Tra i prismi regolari a base triangolare di volume assegnato V quali rendono minima l'area superficiale?

ESERCIZIO n. 8 Si calcolino se esistono i seguenti limiti:
$\frac{\text{arsin } x - x}{x - \text{artan } x}$ $x \to 0$, $\frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\log \sin 2x}$ $x \to \frac{\pi}{4}$, $(\tan x)(\log \sin x)$ $x \to 0$, $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$ $x \to 0$,
$\frac{\log(1+x) - \tan x}{x \log(1+x)}$ $x \to 0$, $\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x+x^2}}$ $x \to +\infty$, $\frac{e^{\sqrt{\log x}}}{\sqrt{x}}$ $x \to +\infty$,
$\left(\frac{\pi}{2} - \text{artan } x\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)$ $x \to +\infty$
$\frac{1+\cos x}{\sin x}$ $x \to 0$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ $n \to +\infty$, $\frac{3e^{2x} + x^2 e^x - \sin x}{x \cos x - 3e^{-2x} - \log(1+x) - e^x}$ $x \to +\infty$

ESERCIZIO n. 9 Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. a - Si provi che f è continua su $\mathbf{R}$.
b - Si provi che le derivate di f in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ sono del tipo funzione razionale moltiplicato f.
c - Si provi che f è derivabile infinite volte in $x = 0$.

ESERCIZIO n. 10 a- Si provi che la derivata del prodotto di n funzioni è la somma dei prodotti delle derivate di ognuna delle funzioni per le rimanenti funzioni:
$D(f_1 \cdot \ldots f_n) = Df_1 \cdot f_2 \ldots f_n + \ f_1 \cdot Df_2 \cdot \ldots f_n + \ldots$
a - Si provi $D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g$.
b- Si supponga che la funzione g abbia n derivate nel punto a e che la funzione f abbia n derivate in $g(a)$. Si provi che la funzione composta $x \mapsto f(g(x))$ ha n derivate nel punto a.

ESERCIZIO n. 11 a- Sapendo che f è una funzione con la derivata prima e seconda continue e sapendo che $\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \to e^3$ quando $x \to 0$ si calcolino $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.
* b- Si provi che se $g = f'$ su un intervallo $[a; b]$ allora g assume tutti valori compresi tra il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore sull'intervallo $[a; b]$. In particolare la funzione g non potrà avere discontinuità di tipo "salto". (Si consideri un'opportuna funzione che abbia come valori i coefficienti angolari delle corde sul grafico di f ed un estremo nei punti $(a, f(a))$ nella prima metà dell'intervallo $[a, b]$, ed un estremo in $(b, f(b))$ nella seconda parte).

* c- Si determini una relazione di ricorrenza per i termini della successione numerica data dalle derivate successive calcolate in 0 della funzione $x \mapsto \text{arsin } x$.

ESERCIZIO n. 12 a- Si disegni la curva $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$.
b- Si disegni a curva $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

ESERCIZIO n. 13 Sia $f(x) = x^7 + x + 1$. Si provi che la funzione è bigettiva da $\mathbf{R}$ in se. Detta g la sua inversa si calcoli $\lim_{y \to +\infty} g\left(\frac{8y}{y+4}\right)$.

ESERCIZIO n. 14 a- Sia $f(x) = x + \log x$. Si provi che è bigettiva da $[0; +\infty[$ in se.

b- Detta g l'inversa di f si provi che $\frac{\log g(a)}{g(a)} \to 0$ quando $a \to +\infty$.
* c- si determini esplicitamente una funzione h per cui $g(a) - h(a) \to 0$ quando $a \to +\infty$. (Si provi $\log(1 + \frac{\log g(a)}{g(a)}) = \log a + g(a) - a$).

ESERCIZIO n. 15 Si scriva $\sin^2 x$ come differenza di due funzioni convesse.

ESERCIZIO n. 16 Si consideri l'equazione $f(x) = 2x\text{artan}\, x = 1$. Si provi che ha una sola soluzione positiva α. Si provi che $\alpha \leq 1$. Si provi che $\frac{2}{\pi} \leq \alpha$. Usando la convessità di f si provi inoltre che $\alpha \leq \frac{4}{2+\pi}$.

ESERCIZIO n. 17 Si mostri che le uniche funzioni f per cui $f'(x) = f(x)$ sono le funzioni $x \mapsto \alpha e^x$.

ESERCIZIO n. 18 -Si mostri per curva nello spazio data dal cammino $t \mapsto (\cos t, \sin t, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ la retta tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi
- * Si mostri che in ogni curva piana che ammette tangente continua ogni corda ha una direzione tangente parallela.

ESERCIZIO n. 19 Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni con centro e grado rispettivamente specificato:
$e^2x + x - 3$ centro 0 grado 8, $\tan x$ centro 0 e grado 5, $\sin\log(1 + x^2)$ centro 0 e grado 5, $\frac{1}{1-\sin x}$ centro 0 e grado 4,
$e^{-x^2-y^2}$ centro (0,0) e grado 2, $e^{-x^2-y^2} - sinxy$ centro (0,0) e grado 2.

ESERCIZIO n. 20 - Si provi che $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{2rx}{r-z}, \frac{2ry}{r-z}\right)$ ristretta alla sfera di centro l'origine e raggio r è la proiezione stereografica dal "polo nord" sul tangente per il "polo sud".
- Se ne scriva l'inversa $(u, v) \mapsto (a(u, v).b(u, v).c(u.v))$
* - Si provi in modo sintetico che conserva gli angoli.

ESERCIZIO n. 21 Si disegnino in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\ :\ f(x, y) = f(a, b)\ \}$ al variare di f e di (a, b), nei casi seguenti:
$x^3 + y^3 - 3axy$, $a > 0$, $(0, 0)$; $\frac{2xy}{x^2+y^2}$; $(\cos\theta, \sin 4\theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO n. 22 Si disegnino in modo approssimativo i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$:

$\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 5 = 0\}$;
$\{(x, y, z) :\ z > -3,\ z^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 0,\ (z + 1)^2 - y^2 - (x + 3)^2 = 0\}$;
$\{(x, y, z) : y \tan z = x\}$; $\{(x, y, z) : e^z \cos y = \cos x\}$; $\{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} = \text{cosh}z\}$.

ESERCIZIO n. 23 Si scriva la matrice delle derivate mettendo per colonne le derivate rispetto alla stessa variabile (Jacobiana) delle seguenti funzioni

$x+2y+3z$, $(x+2y+3z, -x)$, $(x+2y+3z, x^2-y^3+z^4)$, $(e^{x+y+z+w}, \frac{\sin(x+\log(1+y^2+w^6)-z)}{1+x^2}, xyzw)$.

ESERCIZIO n. 24 - Si calcolino seno e coseno dell'angolo di incidenza tra le coppie di cammini in $(1, 1)$ tra le due curve (x^3, x^7), (x^5, x^9) e $(\sin t, \cos t, t)$, $(t^4, 1 + t, t^2)$ per $t = 0$.
- Si trovi il piano tangente alla sfera di centro $(1, 1, 1)$ e raggio 1 in $(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Si determini il piano tangente al grafico $z = x^3 + y^3 + xy$ nel punto $(1, 2, 3)$.
- Si trovi la retta ortogonale alla regione $\{(x, y, z) :\ \log(x^2 + y^2 + e) = e^z\}$ in $(0, 0, 1)$.

- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7+2y^7+z^7-2=0$ e $x^5+2y^5+z^3-2=0$
- Si trovi il tangente nel punto $(1,1,-1)$ dell'insieme di punti definito da $x^7+2y^7+z^7-2=0$ e $x^5+2y^5+z^5-2=0$
- Si trovino le tangenti nel punto $(0,0,0)$ dell'insieme definito da $(x^2+y^2+z^2)^2=2(x^2-y^2-z^2)$ e $x-y^2-z^2=0$.
- Si trovi la normale nel punto $(1,1,2)$ alla superifice immagine di $(u,v)\mapsto(v\cos u, v\sin u, v^2),\ v>0$
- Si calcoli l'angolo di incidenza che formano le seguenti coppie di regioni dello spazio incontrandosi nei punti rispettivamente indicati:

$\{(x,y,z):\ 2x^4+3y^3-4z^2=-4\}$, $\{(x,y,z):\ 1+x^2+y^2=z^2\}$, $(0,0,1)$;
$\{(x,y,z): x^2+y^2=e^z\}$, $\{(x,y,z): x^2+z^2=e^y\}$, $(1,0,0)$;
$\{(x,y,z):\ xy=z\ \}$, $\{(x,y,z):\ \cos(2\pi xy)=z\}$, $(1,1,1)$.

ESERCIZIO n. 25 Si mostri per curva nello spazio data dal cammino $t\mapsto(\cos t,\sin t,t),\ 0\le t\le 2\pi$ la retta tangente non è mai parallela al segmento tra i due estremi
* - Si mostri che in ogni curva piana che ammette tangente continua ogni corda ha una direzione tangente parallela.

ESERCIZIO n. 26 - Sia $f:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ definita da: $F(\rho,\varphi)=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. Verificare che: $(F_\rho(\rho,\varphi))^2+\frac{1}{\rho^2}(F_\varphi(\rho,\varphi))^2=(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2$ dove $x=\rho\cos\varphi$ e $y=\rho\sin\varphi$.
- Sia $f:\mathbf{R}^3\mapsto\mathbf{R}$ differenziabile ovunque e sia $F:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ definita da: $F(R,\varphi,\theta)=f(R\cos\theta\cos\varphi,R\cos\theta\sin\varphi,R\sin\theta)$. Si calcolino le derivate di F in funzione di quelle di f.

ESERCIZIO n. 27 Sia $g=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Dato il cambio di coordinate $(u,v)=(x,\frac{x}{\sqrt{y}})$, esprimere $g(x,y)$ in funzione di u e v .

ESERCIZIO n. 28 Si studino la continuità, la derivabilità nelle diverse direzioni, e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{|xy|};\qquad \sqrt{|x|}\cos y;\qquad f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^3}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 29 - Si provi che $(\varphi,z)\mapsto(R\cos\frac{\varphi}{R},R\sin\frac{\varphi}{R},z)$ conserva i prodotti scalari tra le velocità di cammini (e quindi l'angolo e il modulo).
- Utilizzando longitudine e latitudine si provi che la proiezione stereografica conserva gli angoli nel materasso.

ESERCIZIO n. 30 - Si provi che una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ conserva gli angoli tra vettori se e solo se i trasformati della base canonica sono ortogonali e di egual lunghezza.
-Si deduca che, se $t\mapsto s(t)\in]-1,1[$ è una funzione derivabile strettamente crescente, $(\varphi,t)\mapsto(\sqrt{1-s^2(t)}\cos\varphi,\sqrt{1-s^2(t)}\sin\varphi,s(t))$ è una parametrizzazione della sfera che conserva gli

angoli tra curve se e solo se $s'(t) = 1 - s^2(t)$
- Osservando che $\frac{as'(t)}{1+as(t)} = (\log(1+as(t)))'$ e imponendo che $s(0) = 0$ si provi che $s(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.
- Esprimere la coordinata t così determinata (di Mercatore) con la "latitudine" θ.

ESERCIZIO n. 31 Si esprimano le coordinate della proiezione stereografica (u, v) in funzione di quelle di Mercatore. Si deduca quindi che la proiezione stereografica mantiene gli angoli tra curve e viceversa.

ESERCIZIO n. 32 Sia $f \in C^1(A)$, con A aperto. Dimostrare che f é positivamente omogenea di grado α (i.e. $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \in A$) se e solo se $\alpha f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x)$.

ESERCIZIO n. 33 Dato $C \subseteq \mathbf{R}^2$ si definisce la funzione distanza da C come segue:

$$d_C(x, y) \ = \ \inf_{(a,b)\in C} \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}$$

Si descrivano, nei seguenti casi, le regioni del piano ove d_C é differenziabile:
(a) $C = \{(0, 0)\}$; (b) $C = \{(-1, 0), (0, 1)\}$; (c) $C = \{(-1, 0)\} \cup \{(1, b) : b \in \mathbf{R}\}$; (d) $C = \{(-1, 0)\} \cup \{(a, b) : (a + 1)^2 + b^2 = 1\}$.

ESERCIZIO n. 34 (a) La funzione $f(x, y) = \binom{x-yx}{2xy}$ da $\mathbf{R}^2$ in se è iniettiva? È surgettiva?
(b) Sia $f(x, y) = \binom{x^2+y^2}{2xy} = (u, v)$: si studi l'immagine di f, si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

ESERCIZIO n. 35 Si disegnino le curve $2y^2 - x(x-1)^2 = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

ESERCIZIO n. 36 a) Si calcoli la derivata $\frac{dy}{dx}$ nei seguenti casi: $x^3y - y^3x = a^2$, $\sin xy - e^{xy} - x^2y = 0$, $x^y = y^x$.
b) Si calcolino le derivate specificate per le seguenti relazioni:
$\frac{x^2}{a^2} + y^2b^2 + z^2c^2 = 1 :\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $z^3 + 3xyz = a^3 :\ \frac{\partial z}{\partial x}$; $e^z - xy^2z = 0 :\ \frac{\partial z}{\partial y}$.

ESERCIZIO n. 37 a) Sia $f(x, y) = \binom{x^2-y^2}{xy} = (u, v)$: si trovi un intorno di $P_0 = (1, 1)$ in cui f é iniettiva.
b) Si calcolino le derivate parziali prime e seconde in $U_0 = (0, 1) = f(1, 1)$ dell'inversa della funzione f ristretta a tale intorno.

ESERCIZIO n. 38 Si consideri la funzione $f(s, t) = (e^s t, e^t s, e^t + e^s)$ da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$.
a) si studi l'iniettività di f sul dominio $s,\ t > 0$
b) si scriva come luogo di zeri il piano tangente alla superficie immagine del primo quadrante mediante f nel punto $f(2, 2) = 2e^2(1, 1, 1)$
c)* si studi ove i vettori delle derivate parziali sono allineati o meno.

ESERCIZIO n. 39 Sia $T : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ una rotazione, cioè una applicazione lineare del tipo $(x, y) \mapsto R(x, y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$, con $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Detto $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dimostrare che: $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ per ogni $u \in C^2$.

ESERCIZIO n. 40 Determinare i punti critici (ove si annulla il vettore gradiente) delle seguenti funzioni: $x^3 + (x-y)^2$, $x^4 + (x-y)^2$, $xy + y^2 - 3x$, $\sin(x+y)$, $x^2 - \sin y$, $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

ESERCIZIO n. 41 Si dica se $(0,0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: $x^4 + y^4$, $x^4 - y^4$, $1 - x^4 - x^2y^2 - y^4$.

ESERCIZIO n. 42 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

xy su $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$x^2 + y^2 - (x+y)$ su $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

$\frac{x^2 y}{x^2+4y^2} + x$ per $xy > 0$ $\quad xy + x$ per $xy \leq 0$ su $\{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\}$

ESERCIZIO n. 43 Sia $f(x,y) = 2x^4 - x^2 e^y + e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2 + y^2 \to +\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f = c$, al variare di c in $\mathbf{R}$, mettendo in risalto quali sono tutte di un pezzo, quali sono limitate.

ESERCIZIO n. 44 Sia data un insieme di coppie $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:

$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?

ESERCIZIO n. 45 Si ricorda che $C \subseteq \mathbf{R}^n$ è detto convesso se contine interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0;1]$ allora $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Una funzione $f : C \to \mathbf{R}$ si dice convessa se C è convesso e se $\lambda \in [0;1]$ allora $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

a) Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^n$, e sia $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.

b) Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.

ESERCIZIO n. 46

a) Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremale interno a Ω. Nel caso si tratterebbe di un massimo o di un minimo?

b) Utilizzando il fatto che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n. 47 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$f(x,y) = \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}$, $y - x^2 = 0$; $f(x,y) = \sin((x-2)^2 + y^2)$, $(1-x)^3 + y^2 = 0$;

$f(x,y) = x^2 + 6xy + 3y^2$, $x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2}$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2$, $\max\{|x+2|, |y+3|\} = 1$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, $\max\{|x+2|, |y+3|, |z+4|\} = 1$;

ESERCIZIO n. 48 Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z - y = 0\} \cap \{x + y + z = 1\}$.

ESERCIZIO n. 49 Si considerino i luoghi dei punti di $\mathbf{R}^2$ descritti dalle seguenti equazioni:

(i)	$x^2 + y^2 - 1 = 0,$	(v)	$x^2 + y^2 + xy = 0,$
(ii)	$x^2 + y^2 = 0,$	(vi)	$x^2 - y^2 = 0,$
(iii)	$x^2 + y^2 + 1 = 0,$	(vii)	$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0,$
(iv)	$x^2 + y^2 + 2xy = 0,$	(viii)	$(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0,$

e si riconosca quale delle precedenti equazioni rappresenta:

(a)	nessun punto,	(d)	una retta,
(b)	un punto,	(e)	due rette,
(c)	due punti,	(f)	una circonferenza.

ESERCIZIO n. 50 Verificare che:
- un ellisse è il luogo dei punti con somma delle distanze da due punti fissi costante;
- un iperbole è il luogo dei punti con differenza delle distanze da due punti fissi costante;
- una parabola è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa e da un punto fisso.

DEFINIZIONE - Si dice cammino di riflessione rispetto ad una retta per un suo punto l'unione di due semirette (lati) con origine nel punto e simmetriche rispetto all'asse perpendicolare alla retta nel punto.
- Un cammino di riflessione rispetto ad un insieme in un suo punto è un cammino di riflessione rispetto all'eventuale retta tangente all'insieme dato in questo suo punto.

ESERCIZIO n. 51 Verificare che:
- i cammini di riflessione rispetto ad una parabola con un lato parallelo all'asse della stessa hanno l'altro che passa per il fuoco della parabola;
- i cammini di riflessione rispetto ad un'elisse che hanno un lato che passa per un fuoco hanno il secondo lato che passa per l'altro fuoco;

- i cammini di riflessione rispetto ad un iperbole che hanno un lato passante per un fuoco hanno prolungamento del secondo lato passante per l'altro fuoco.

ESERCIZIO n. 52 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x, y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni del piano o dello spazio:
- simmetria rispetto al punto $(1, 2)$
- simmetria rispetto alla generica retta passante per l'origine
- simmetria rispetto alla retta passante per $(2, 3)$ e parallela a $(3, 4)$
- rotazione antioraria di un sesto di 'angolo giro' attorno all'origine
- rotazione antioraria di un ottavo di 'angolo giro' attorno al punto $(4, 5)$
- simmetria rispetto al punto $(1, 2, 3)$
- simmetria rispetto al piano $x - y + z = 0$
- simmetria rispetto al piano $x - y + z = 3$
- rotazione antioraria di un angolo retto attorno all'asse verticale $(0, 0, 1)$
- rotazione di un angolo retto attorno all'asse orientato positivamente dall'origine a $(1, 1, 1)$ in senso antiorario.

ESERCIZIO n. 53 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x, y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni dal piano o dello spazio: la dilatazione di centro $(1, 1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$; la dilatazione anisotropa di centro $(1, 1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$ nella direzione $(1, 2)$ e fattore 2 nella direzione $(2, 1)$. dilatazione anisotropa di centro l'origine e fattori di scala $2,\ 4,\ -1$ nelle direzioni $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$

ESERCIZIO n. 54 A che trasformazioni del piano o dello spazio corrsipondono le seguenti funzioni: $(x, y) \mapsto (-y, x)$,$(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1)$, $(x - y, x + y)$; $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$, $(x, y, 0)$, $(\frac{1}{2}x, 2y, 0)$

ESERCIZIO n. 55 - Date due rette nel piano che trasformazione si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad una di esse e quindi la simmetria rispetto la seconda?
- Scambiando l'ordine di queste simmetrie quando si ottiene lo stesso risultato?

ESERCIZIO n. 56 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $R(x, y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = -bx + ay$, definisce una *rotazione* del piano (attorno all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = R(1, 0)$, $V = R(0, 1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato positivamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = R(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 57 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da $S(x, y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay,$
definisce una *simmetria* del piano (rispetto all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = S(1,0)$, $V = S(0,1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato negativamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = S(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n.58 Si provi che tutte e sole le trasformazioni definite da polinomi omogenei di primo grado nelle coordinate del piano che conservano il prodotto scalare sono le isometrie lineari (rotazioni e riflessioni).

ESERCIZIO n. 59** Le trasformazioni T bigettive del piano che mandano rette in rette sono tutte e sole le trasformazioni definite da polinomi di primo grado (affini) e bigettive.

ESERCIZIO n.60 Le trasformazioni definite da polinomi omogenei di primo grado nelle variabili del piano che conservano gli angoli tra due semirette sono tutte e sole quelle del tipo $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$, $(ax + by, bx - ay)$. Riconoscervi le rotazioni attorno all'origine seguite da una dilatazione di centro l'origine e le riflessioni rispetto a rette per l'origine seguite da una dilatazione di centro l'origine.

ESERCIZIO n.61 Identificando un generico numero complesso $z = x+iy$ con il generico punto di $\mathbf{R}^2$ di coordinatre (x, y) a che punto di $\mathbf{R}^2$ corrisponde il prodotto zw ove $w = a - ib$?
