Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica
Alberti, Tortorelli

IV foglio di esercizi: spazi di Hilbert esempi, coordinate e minima norma

---

Legenda: • esercizi più impegnativi, ∘ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌢ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

Testi da cui si è preso spunto: A.A. Kirillov A.D. Gvisiani "Teoremi e problemi dell'analisi funzionale" cap. I, II, III; A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" cap. 3, 5, 8 10, 11; M.Reed B. Simon "Methods of modern Mathematical Physics,, Vol 1 cap. 1, 2; W.Rudin "Analisi Reale e Complessa" cap 1, 2, 3,4.

ESERCIZIO n. 1 Si provi che per ogni $p \neq 2$, $p \geq 1$ la norma $\|f\|_p$ non soddisfa l'identità del parallelogramma e quindi non è indotta da alcun prodotto scalare.

11Ex4E5 Per ogni coppia di funzioni reali g_1, g_2 definite su $\mathbf{R}$ sia $g_1 \otimes g_2$ la funzione su $\mathbf{R^2}$ definita da $g_1 \otimes g_2(x_1, x_2) := g_1(x_1)\, g_2(x_2)$.

a) Dimostrare che $L^p(\mathbf{R}) \otimes L^p(\mathbf{R})$ è contenuto in $L^p(\mathbf{R}^2)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

b) Dimostrare che lo span di $L^p(\mathbf{R}) \otimes L^p(\mathbf{R})$ è denso in $L^p(\mathbf{R}^2)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

c) Far vedere che se $\{e_m : m \in \mathbf{N}\}$ è una base di Hilbert di $L^2(\mathbf{R})$ allora le funzioni $e_m \otimes e_n$ con $m, n \in \mathbf{N}$ formano una base di Hilbert di $L^2(\mathbf{R}^2)$.

ESERCIZIO n. 2 a- Si provi che in l^2, lo spazio delle successioni a quadrato sommabile, $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum x_n y_n$ è ben definito ed è un prodotto scalare.
b- Si provi che la struttura ottenuta è quella di spazio di Hilbert.

• ESERCIZIO n. 3 Sia (a_n), $n \in \mathbf{N}$ una successione di numeri positivi. Se per ogni (b_n), $n \in \mathbf{N}$ di numeri non negativi in l^2 si ha $|\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n b_n| < \infty$ allora (a_n), $n \in \mathbf{N}$ sta in l^2
[Si cerchi una dimostrazione elementare per assurdo raggruppando gli a_n]

ESERCIZIO n.4 Sia H un Hilbert di dimensione infinita, provare che esiste $\gamma \in C([0;1], H)$ per cui $\gamma(b) - \gamma(a) \perp \gamma(d) - \gamma(c)$ per ogni $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$
[Se $H = L^2(0;1)$ si trovi una curva di funzioni caratteristiche].

⌢ ESERCIZIO n.5 (L^2 di misure con densità, cfr. 11Ex3E7) Data φ misurabile si ponga quando definito

$$(f \cdot g)_\varphi = \int_0^1 f(x) g(x) \varphi(x) dx$$

a-Si provi che se $\varphi \in L^\infty(0;1)$ la $(f \cdot g)_\varphi$ definisce una forma bilineare su $L^2(0;1) \times L^2(0;1)$.

b- Se $\varphi \geq 0$ q.o. per ogni funzione misurabile f si definisca $|f|_\varphi^2 = \int_0^1 f^2(x)\varphi(x)dx$ e quindi

$$L^2_\varphi(0;1) = \{f : \ |f|_\varphi < \infty\}/ \equiv_\varphi, \quad f \equiv_\varphi g \quad \Leftrightarrow \quad |f-g|_\varphi = 0$$

Si provi che $L^2_\varphi(0;1)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(f \cdot g)_\varphi$.
c - Si provi che se $\varphi > 0$ q.o. allora $f = g$ q.o. se e solo se $f \equiv_\varphi g$.
d- Si provi che se $M \geq \varphi > 0$ q.o. allora $L^2 \subset L^2_\varphi$.
e- Si provi che se $\varphi \geq m > 0$ q.o. allora $L^2_\varphi \subset L^2$.
• f- Se $M \geq \varphi > 0$ q.o. e $|\frac{1}{\varphi}|_\infty = \infty$ si provi che l'inclusione è stretta.
g- Si studino i casi in cui φ non è limitata, e in cui φ si annulla su insiemi di misura positiva.

• ESERCIZIO n.6 (Basi di Haar) Si considerino $g_{n,k} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $\ k \in \mathbf{Z}$:

$$g_{0,0}(x) = g(x) = \chi_{[0;1/2[} - \chi_{[1/2;1[} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & x \notin [0;1[\end{cases} \qquad g_{n,k}(x) \;=\; 2^{\frac{n}{2}} g(2^n x - k)$$

a- Si provi che $\mathcal{F} =: \{1\} \cup \{g_{n,k}\}_{n \in \mathbf{N},\ 0 \leq k \leq 2^n - 1}$ è un sistema ortonormale per $L^2(0;1)$.
b- Posto $I_{n,k} = \chi_{[\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}[}$ si trovi una relazione tra il genrico $I_{n,k}$ e le due funzioni $I_{1,0}$, $I_{1,1}$.
c- Si provi che $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert per $L^2(0;1)$.
• d- Si provi che $\{g_{n,k}\}_{n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}}$ è una base di Hilbert per $L^2(\mathbf{R})$.

11Ex2E1 Sia $e(x) := \frac{1}{\sqrt{6\pi}}(1 + e^{ix} + e^{2ix})$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Completare $\{e\}$ ad una base di Hilbert dello spazio di Hilbert complesso $L^2(-\pi, \pi)$.

09Ex1E5 Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dimostrare che la funzione f è identicamente nulla.

12Ex4E3 Tra tutti i polinomi p di grado minore o uguale a due trovare quello che rende minimo il valore di $\|x^3 - p(x)\|_{L^2(-1;1)}$.

ESERCIZIO n. 7 a- Calcolare $\min\{\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx : a,\ b,\ c \in \mathbf{R}\}$
b- Trovare una base ortonormale in $L^2(-1;1)$ per il sottospazio dei polinomi di grado minor eguale a 2 utlizzando il procedimento di Gram-Schmidt.

ESERCIZIO n.8 a- I polinomi sono densi in $L^p(I)$, $p < \infty$, per ogni segmento I.
b- Usando il procedimento di Gram-Schmidt con la successione di polinomi $1,\ x,\ x^2, ...$ si provi che $L^2(I)$ ha una base di Hilbert di polinomi $\{p_n(x)\}$, $n \in \mathbf{N}$, per cui $deg p_n = n$.
c- Se $I = [-1;1]$ allora p_{2n} è una funzione pari e p_{2n+1} è una funzione dispari.

• 12C1E7 Per ogni $n = 0,\ 1,\ 2\ldots$ siano p_n i polinomi ottenuti applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla successione $1,\ x,\ x^2 \ldots$ nello spazio $L^2(-1;1)$, e siano q_n i polinomi dati

$$q_n(x) := D^n((x^2-1)^n)$$

Dimostrare quanto segue: a) $(1-x^2)^{n-k}$ divide $D^k((x^2-1)^n)$ per ogni $k,\ n$ con $0 \leq k < n$; b) $\langle q_n(x); x^m \rangle = 0$ per ogni $m,\ n$ con $0 \leq m < n$; c) q_n è un multiplo di p_n per ogni n.

$\frown$ ∘ ESERCIZIO n.9 a - Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita provare che la palla unitaria chiusa non è compatta non essendo totalmente limitata.
b- Sia $\{h_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Per quali successioni di numeri $\{r_n\}$ l'iniseme $\{r_n h_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ è totalmente limitato?
c- Sia $K_a = \{x \in l^2 : |x_n| \leq \frac{1}{n^a}\}$, $a \geq 0$. Si provi che è chiuso. Per quali $a \geq 0$ è totalmente limitato e quindi compatto?
d- Sia $K^{\mathbf{a}} = \{x \in l^2 : |x_n| \leq a_n\}$, con $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ successione di numeri non negativi. Per quali successioni $\mathbf{a}$ l'insieme è totalmente limitato?
e- Sia $C^{\mathbf{a}} = \{y \in l^2 : \exists \mathbf{x} = \{x_n\}\ |\mathbf{x}|_2 \leq\ 1 \ \text{ e } \ y_n = a_n x_n\}$, ove $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione limitata. Per quali successioni $\mathbf{a}$ l'insieme è totalmente limitato?