CAPITOLO PRIMO

CENNI DI LOGICA
E
TEORIA ELEMENTARE DEGLI INSIEMI

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

1.1

Si ricordi che a destra e a sinistra del simbolo $\subset$ devono comparire degli insiemi, a destra del simbolo $\in$ un insieme, a sinistra un elemento dell'insieme. Si presti però attenzione al fatto che un insieme può avere come propri elementi altri insiemi. Si ricordi infine che la notazione a indica un elemento, $\{a\}$ un insieme, precisamente quello che ha come unico elemento a.

Sono vere: (a), (d), (f), (g), (h), (i), (n), (o), (p), (q), (s).

Sono false: (b), (c), (e), (l), (m), (r), (t).

1.2

(a) $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$.

(b) Sono vere: (b_2), (b_4), (b_6); sono false: (b_1), (b_3), (b_5).

(c) Per $n = 1$ l'affermazione è vera: $P(A)$ contiene due oggetti, cioé $\varnothing$ ed A. Supponiamo l'affermazione vera per n e proviamola per $n+1$. L'insieme di $n+1$ elementi si può scrivere nella forma $A_{n+1} = A_n \cup \{x_{n+1}\}$, dove A_n ha n elementi. Ogni sottoinsieme di A_n si fa diventare sottoinsieme di A_{n+1} in due modi: lasciandolo invariato oppure unendogli l'elemento x_{n+1}. In definitiva ogni elemento di $P(A)$ genera due elementi di $P(A_{n+1})$ e quindi i 2^n elementi di $P(A_n)$ diventano $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ elementi di $P(A_{n+1})$. Si osservi che il risultato vale anche per $n = 0$: l'unico insieme che non ha elementi è l'insieme vuoto $\varnothing$ e quindi $P(\varnothing)$ ha come unico elemento proprio $\varnothing$.

1.3

(a) $A \cup B = A \cup \{3,4\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B = A \setminus \{1,2\}$.

(b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : \ -5 \le x \le 7\}$, $A \cap B = \{2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{x \in \mathbb{Z} : \ -5 \le x \le 1\}$.

(c) $A \cup B = \{-1, 1\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = \varnothing$.

(d) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = (-2,-1) \cup (1,2)$, $A \setminus B = [-1,1]$.

1.4

(a) x multiplo di 20 $\Longrightarrow x$ multiplo di 4.

(b) $\sqrt{x-1} = 1 \iff x = 2$.

(c) $x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1$.

(d) $x > 1 \iff x^3 > 1$.

(e) f derivabile $\Longrightarrow f$ continua.

(f) Condizione sufficiente perché una funzione sia integrabile in $[a, b]$ è che sia continua.

(g) Condizione sufficiente perché lo studente passi l'esame è che studi.

(h) Condizione sufficiente perché x appartenga ad A è che appartenga ad $A \cap B$; condizione necessaria (ma non sufficiente) perché x appartenga ad $A \cap B$ è che appartenga a B.

(i) Condizione sufficiente perché risulti $\sqrt{x^2 - 1} = 2$ è che sia $x = \sqrt{5}$.

1.5

(a)	$B \Longrightarrow A$	(b)	$A \iff B$	(c)	$A \Longrightarrow B$	(d)	$B \Longrightarrow A$.
(e)	$B \iff A$	(f)	$A \iff B$	(g)	$A \iff B$	(h)	$B \Longrightarrow A$.
(i)	$B \Longrightarrow A$	(l)	$A \iff B$	(m)	$A \iff B$	(n)	$B \Longrightarrow A$.
(o)	$A \iff B$	(p)	$A \iff B$	(q)	$B \Longrightarrow A$	(r)	$A \iff B$.
(s)	$A \Longrightarrow B$	(t)	$B \Longrightarrow A$	(u)	$A \iff B$.		

1.6

L'affermazione corretta è la (c), che fornisce una dimostrazione dell'enunciato. Le altre affermazioni sono sbagliate, perché interpretano l'enunciato come una condizione necessaria e sufficiente a che una terna sia pitagorica, mentre la condizione è solo sufficiente.

1.7

(a) Almeno uno studente del corso non abita a Pisa.

(b) Tutti gli studenti prenderanno all'esame non meno di 30 (Auguri!).

(c) Almeno una studentessa del corso ha occhi che non sono celesti oppure capelli che non sono biondi.

(d) Almeno un docente non svolge alcun corso e non è all'estero per motivi di studio.

(e) La frase afferma che l'insieme A è costituita da numeri minori di un dato M.

Ad esempio, $A = [0, 1]$, ovvero tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 : tutti i numeri di questo insieme sono minori di 2 (ovviamente, 2 non è l'unica scelta: possiamo prendere al suo posto un qualunque numero maggiore di 1). Un insieme così fatto si dice limitato superiormente: nella rapprsentazione sulla retta cartesiana M è un limite che i numeri dell'insieme non possono scavalcare a destra.

la negazione della proposizione si scrive:

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A : \quad x \geq M.$$

Un insieme con questa proprietà si dice *non limitato superiormente:* per qualunque scelta del numero M, c'è almeno un numero di A che è più grande di M. Come esempio possiamo considerare $A = [1, +\infty)$, ovvero l'insieme di tutti i numeri reali che sono maggiori o uguali a 1.

(f) Anche se apparentemente analoga alla proposizione in (e), questa non caratterizza alcuna particolare proprietà di A (se non quella di non essere l'insieme vuoto): qualunque sia il numero $x \in A$ evidentemente si può trovare un altro numero (non necessariamente appartenente ad A) che sia più grande di questo (ad esempio: $x+1$).

La negazione è:

$$\exists x \in A : \ \forall M \in \mathbb{R}, \ \ x \geq M.$$

Questa è una proprietà che non può essere verificata da nessun insieme (non vuoto): infatti afferma l'esitenza di un numero maggiore o uguale di tutti i numeri reali. Questo non è possibile, perché l'insieme dei reali non è limitato superiormente: per ogni numero reale fissato ne esistono infiniti più grandi di questo([1]).

(g) In corrispondenza a valori diversi della variabile x la funzione assume valori diversi (una funzione con questa proprietà si dice *iniettiva*). Un esempio ovvio è dato dalla funzione $f(x) = x$; più in generale possiamo considerare $f(x) = x^p$, con p intero dispari.

La negazione è:

$$\exists x_1, \, x_2 \in A, \ x_1 \neq x_2 : \ f(x_1) \ = \ f(x_2),$$

cioé esistono almeno due valori diversi di x per i quali la funzione assume lo stesso valore.

Un esempio è dato dalla funzione $f(x) = x^p$, con p pari, che assume lo stesso valore per $x = -k$ e per $x = k$.

(h) La funzione assume almeno una volta tutti i valori reali (funzione surgetiva); ad esempio $f(x) = x^p$, con p dispari.

La negazione è:

$$\exists y \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A, \ \ f(x) \neq y$$

cioé esiste almeno un valore reale che non è mai assunto dalla funzione; ad esempio, la funzione $f(x) = x^p$, con p intero pari, assume solo valori maggiori o uguali a 0.

1.8

Le espressioni (a), (b), (d) sono false; l'espresione (c) è vera.

[1] Questa proprietà dei reali è un corollario del *Principio di Archimede*: se $a, \, b \in \mathbb{R}$ con $a, \, b > 0$ esiste un numero naturale n tale che $na > b$.

1.9

In ogni tabella la P che compare nell'ultima colonna si riferisce alla proposizione che stiamo esaminando.

(a)

p	q	r	$p \vee \neg q$	$r \wedge q$	P
v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	f
v	f	v	v	f	f
v	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v
f	v	f	f	f	v
f	f	v	v	f	f
f	f	f	v	f	f

(b)

p	q	$\neg[p \vee q]$	$\neg p \wedge \neg q$	P
v	v	f	f	f
v	f	f	f	f
f	v	f	f	f
f	f	v	v	v

(c)

p	q	$p \Longrightarrow \neg q$	$\neg p \Longrightarrow q$	P
v	v	f	v	v
v	f	v	v	v
f	v	v	v	v
f	f	v	f	v

(d)

p	q	r	$p \Longrightarrow q$	$\neg p \iff r$	P
v	v	v	v	f	f
v	v	f	v	v	v
v	f	v	f	f	v
v	f	f	f	v	v
f	v	v	v	v	v
f	v	f	v	f	f
f	f	v	v	v	v
f	f	f	v	f	f

(e)

p	q	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	P
v	v	v	f	f
v	f	f	v	f
f	v	f	v	f
f	f	f	v	f

Potevamo attenderci questo risultato, perché: $\neg p \vee \neg q \iff \neg(p \wedge q)$ (formula di De Morgan)

(f)

p	q	$p \iff \neg q$	$q \Longrightarrow \neg p$	P
v	v	f	f	v
v	f	v	v	v
f	v	v	v	v
f	f	f	v	f

(g)

p	q	$p \Longrightarrow q$	$(p \Longrightarrow q) \wedge \neg q$	P
v	v	v	f	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	v	v

1.10

Possiamo procedere sia con le tabelle di verità che applicando le definizioni dei connettivi logici.

Dimostriamo (a) con entrambi i procedimenti:

p	q	$\neg p \Longrightarrow \neg q$	$(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge p$	$\neg[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge p]$	P
v	v	v	v	f	v
v	f	v	v	f	f
f	v	f	f	v	v
f	f	v	f	v	v

p	q	$\neg p$	$p \Longrightarrow q$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

Possiamo quindi dedurre che la proposizione (a) equivale a $p \Longrightarrow q$.

Dimostriamo ora per (a) quanto verificato sopra, mediante le tabelle di verità, utilizzando le definizioni dei connettivi logici e relative proprietà: associative, distributive, commutative e leggi di De Morgan.

$$
\begin{array}{llll}
[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge p] \Longrightarrow q & \Longleftrightarrow & \neg[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge p] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[\neg(\neg p \Longrightarrow \neg q) \vee \neg p] \vee q & \Longleftrightarrow & [\neg(p \vee \neg q) \vee \neg p] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[(\neg p \wedge q) \vee \neg p] \vee q & \Longleftrightarrow & (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) & \Longleftrightarrow \\
(\neg p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p \vee q) & \Longleftrightarrow & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q), &
\end{array}
$$

che equivale a $p \Longrightarrow q$.

Sviluppiamo la proposizione (b)

$$
\begin{array}{llll}
\neg\,[(p \Longrightarrow \neg q) \wedge q] \vee \neg p & \Longleftrightarrow & [\neg(p \Longrightarrow \neg q) \vee \neg q] \vee \neg p & \Longleftrightarrow \\
[\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg q] \vee \neg p & \Longleftrightarrow & [(p \wedge q) \vee \neg q] \vee \neg p & \Longleftrightarrow \\
[(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q] \vee \neg p & \Longleftrightarrow & (p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg p) & \Longleftrightarrow \\
(\neg p \vee p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg p) & & &
\end{array}
$$

Che risulta essere una tautologia perché sia $\neg p \vee p$, sia $\neg q \vee q$ sono sempre verificati.

Sviluppiamo la proposizione (c)

$$
\begin{array}{llll}
\neg\,[(p \Longrightarrow \neg q) \wedge \neg p] \vee q & \Longleftrightarrow & [\neg(p \Longrightarrow \neg q) \vee p] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[\neg(\neg p \vee \neg q) \vee p] \vee q & \Longleftrightarrow & [(p \wedge q) \vee p] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[(p \vee p) \wedge (p \vee q] \vee q & \Longleftrightarrow & [(p \wedge (p \vee q)] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[(p \wedge p \vee (p \vee q)] \vee q & \Longleftrightarrow & p \vee q. &
\end{array}
$$

Sviluppiamo la proposizione (d)

$$
\begin{array}{llll}
\neg\,[(\neg p \Longrightarrow q) \wedge p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow & [\neg(\neg p \Longrightarrow q) \vee \neg p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow \\
[\neg(p \vee q) \vee \neg p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow \\
[(\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow & [\neg p \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee \neg q & \Longleftrightarrow \\
(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg q) & \Longleftrightarrow & \neg p \vee \neg q. &
\end{array}
$$

Sviluppiamo la proposizione (e)

$$
\begin{array}{llll}
\neg\,[(\neg p \Longrightarrow q) \wedge \neg q] \vee p & \Longleftrightarrow & [\neg(\neg p \Longrightarrow q) \vee q] \vee p & \Longleftrightarrow \\
[\neg(p \vee q) \vee q] \vee p & \Longleftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \vee q] \vee p & \Longleftrightarrow \\
[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q] \vee p & \Longleftrightarrow & \{(\neg p \vee q) \vee p\} & \Longleftrightarrow \\
\{(\neg p \vee p) \vee q\} & \Longleftrightarrow & q &
\end{array}
$$

Sopra si è tenuto conto che $\neg p \vee p$ è sempre verificata, e quindi se viene intersecata con un'‘altra proposizione rimane solo da verificare quest'ultima. Invece $q \wedge \neg q$ non è mai verificata, se consideriamo l'unione di questa con un'altra proposizione si deve solamente verificare la seconda.

Sviluppiamo (f)

$$
\begin{array}{llll}
\neg\,[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge q] \vee p & \Longleftrightarrow & [\neg(\neg p \Longrightarrow \neg q) \vee \neg q] \vee p & \Longleftrightarrow \\
[\neg(p \vee \neg q) \vee \neg q] \vee p & \Longleftrightarrow & [(\neg p \wedge q) \vee \neg q] \vee p & \Longleftrightarrow \\
[(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)] \vee p & \Longleftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q) \vee p & \Longleftrightarrow \\
(\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) & \Longleftrightarrow & \neg q \vee p &
\end{array}
$$

Sviluppiamo (g)

$$
\begin{array}{llll}
\neg\,[(\neg p \Longrightarrow \neg q) \wedge \neg p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow & [\neg(\neg p \Longrightarrow \neg q) \vee p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow \\
[\neg(p \vee \neg q) \vee p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow & [(\neg p \wedge q) \vee p] \vee \neg q & \Longleftrightarrow \\
[(\neg p \vee p) \wedge (p \vee q)] \vee \neg q & \Longleftrightarrow & (p \vee q) \vee \neg q & \Longleftrightarrow \\
p \vee (q \vee \neg q) & \Longleftrightarrow & p &
\end{array}
$$

Sviluppiamo la proposizione (h)

$$\begin{array}{llll}
\neg\,[(\neg p \Longrightarrow q) \wedge \neg p] \vee q & \Longleftrightarrow & [\neg(\neg p \Longrightarrow q) \vee p] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[\neg(p \vee q) \vee p] \vee q & \Longleftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \vee p] \vee q & \Longleftrightarrow \\
[(\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)] \vee q & \Longleftrightarrow & (\neg q \vee p) \vee q & \Longleftrightarrow \\
(\neg q \vee q) \vee p & \Longleftrightarrow & p &
\end{array}$$

1.11

(a) $D = \{2,\, 3,\, 5,\, 7\}$
(b) $D = \{12,\, 15,\, 18\}$
(c) $D = \{(1,2),\, (1,3),\, (1,4),\, (2,3),\, (2,4),\, (3,4)\}$
(d) $D = \{(8,10),\, (7,9),\, (6,8),\, (5,7),\, (4,6),\, (3,5),\, (2,4),\, (1,3),\, (0,2),\, (-1,1),\, (-2,0)\}$.

1.12

(a) x è multiplo di 15; $D = \{15,\, 30,\, 45,\, 60,\, 75,\, 90\}$
(b) x è multiplo di 5 ma non di 3; $D = \{10,\, 20,\, 25,\, 35,\, 40,\, 50,\, 55,\, 65,\, 70,\, 80,\, 85,\, 95,\, 100\}$

1.13

(a) Per $n = 3$ è vera: $14 \le 27$. Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n+1$:
$$(n+1)! + 2^{n+1} = n!\,(n+1) + 2 \cdot 2^n \le$$
$$\le (n+1)(n! + 2^n) \le (n+1)\,n^n \le (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$

(b) Per $n = 2$ è vera: $13 \le 16$. Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n+1$:
$$2^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \le 4(2^n + 3^n) \le 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}.$$

(c) Per $n = 10$ è vera, perché
$$(1-x^5)^{10} > (1-x^4)^{10} \iff 1 - x^5 > 1 - x^4 \iff x^4 > x^5 \iff x \in (0,1).$$
Supponiamola vera per n e verifichiamola per $n+1$:
$$(1-x^4)^{n+1} = (1-x^4)(1-x^4)^n < (1-x^5)^{10}.$$

(d) Per $n = 1$ è vera: $1 \le 2$.
Supponamola vera per n e verifichiamola per $n+1$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^k \le (1+n^n)\cdots(1+1) + (n+1)^{n+1} \overset{?}{\le} [1 + (n+1)^{n+1}](1+n^n)\cdots(1+1).$$
La maggiorazione che rimane da dimostrare (cotrassegnata da ?) equivale a
$[(1+n^n)\cdots(1+1)](n+1)^{n+1} \ge (n+1)^{n+1}$ ovvero a $(1+n^n)\cdots(1+1) \ge 1$
che è banalmente vera.

(e) Per $n = 1$ è vera: $1 \le 1$.
Supponiamo vera per n e verifichiamola per $n+1$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \le \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\le} 2 - \frac{1}{n+1}.$$
La diseguaglianza che rimane da verificare equivale a:
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{(n+1)^2} \iff \frac{1}{n(n+1)} \ge \frac{1}{(n+1)^2} \iff n+1 \ge n.$$
Nell'ultima in cui l'abbiamo scritta, la diseguaglianza è immediata.

(f) Per $n = 1$ è vera: $1 \leq 1$.

Supponiamola vera per n e deduciamo da questo che allora è vera per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} \leq \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^3} \stackrel{?}{\leq} \frac{3}{2} - \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

La diseguaglianza che rimane da verificare equivale a:

$$\frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} \iff \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \iff 2n^2 \leq (2n+1)(n+1).$$

Nell'ultima forma in cui l'abbiamo scritta, la diseguaglianza è immediata una volta che si sia sviluppato il prodotto al secondo membro.