

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA I-A DEL 2008

Cenni di logica e teoria degli insiemi.

I simboli $\subset, =, \cap, \cup, \setminus, \times, \vee, \wedge, \rightarrow, \iff, \forall, \exists, \neg$. Proprietà delle operazioni tra insiemi e tra le proposizioni. Negazione di proposizioni. Dimostrazione per assurdo. L'insieme \mathbb{N} dei naturali. Il principio di induzione. Il fattoriale ed i coefficienti binomiali. La disuguaglianza di Bernoulli (dim.). Il simbolo di sommatoria e sue proprietà. La formula di Newton del binomio (dim.). Le proprietà della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$ (dim.).

Il concetto di funzione. Funzione iniettiva, suriettiva, bigettiva. Composizione di funzioni. Funzioni invertibili.

Strutture algebriche, ordinamenti, strutture topologiche.

Definizione di gruppo. Esempi di gruppi notevoli. Definizione di anello. Relazioni su di un insieme. La relazione di equivalenza. Classi di equivalenza. Definizione di corpo. Costruzione di \mathbb{Z} da \mathbb{N} . Costruzione dei razionali \mathbb{Q} dagli interi \mathbb{Z} . L'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Insiemi ordinati e totalmente ordinati. Definizione di maggiorante, di minorante, di massimo, di minimo di un insieme. Unicità del massimo e del minimo (dim.). Proprietà dei gruppi e dei corpi ordinati. Incompletezza di \mathbb{Q} . Il corpo dei numeri reali \mathbb{R} e sue proprietà. L'assioma di Dedekind. L'assioma di Archimede. Definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme e relative proprietà. Dimostrazione dell'esistenza della radice quadrata e della radice n -esima di un numero reale positivo. Definizione del valore assoluto di un numero reale e dimostrazione delle sue proprietà.

Definizione di distanza. Definizione di spazio metrico. Definizione di intorno, di aperto. Definizione di spazio topologico. Definizione di chiuso. La topologia in \mathbb{R} ed in \mathbb{R}^n . Proprietà dei chiusi e degli aperti. L'unione di aperti è un aperto (dim.), l'intersezione finita di aperti è un aperto (dim.), l'unione finita di chiusi è un chiuso (dim.), l'intersezione di chiusi è un chiuso (dim.). Definizione di punto aderente e di punto di accumulazione. Chiusura di un insieme. Derivato di un insieme. Teo.: ogni intorno di un punto x_0 di accumulazione per un insieme E contiene infiniti punti di E diversi da x_0 , (dim.). La chiusura di un insieme è uguale all'insieme unito il suo derivato (dim.).

Def. di punto interno.

Teo.: l'insieme dei punti interni di un insieme è un aperto, (dim.)

Definizione di punto di frontiera e di punto isolato.

Definizione di spazio topologico sconnesso e connesso.

Teo.: equivalenza in \mathbb{R} tra convessità e connessione (dim.)

Definizione di spazio metrico compatto. Teo.: un compatto è chiuso (dim.). Teo.: un chiuso di uno spazio metrico compatto è compatto (dim.).

I numeri complessi.

Il corpo dei numeri complessi. Forma algebrica e forma trigonometrica dei numeri complessi. Il piano di Gauss. le operazioni con i numeri complessi. La formula di De Moivre. La formula della radice ennesima di un numero complesso (dim.). Equazioni e sistemi con i numeri complessi.

Successioni di reali.

Definizione di successione convergente, divergente. Teo. di unicità del limite (dim.). Teo.: una successione convergente è limitata (dim.), teo. della permanenza del segno (dim.), teo. del confronto e dei carabinieri (dim.). Operazioni con i limiti di successioni (dim.).

Le successioni monotone. Teo. di regolarità delle successioni monotone (dim.)

Successioni estratte. Teorema di Bolzano-Weierstrass (dim.).

Successioni di Cauchy. Criterio di convergenza di Cauchy (dim.). Esempi di successioni notevoli e di successioni non regolari. Le successioni definite per ricorrenza. Massimo e minimo limite di successioni. Una successione converge se e solo se il massimo ed il minimo limite coincidono (dim.) Massimi e minimi limiti e successioni estratte. La funzione esponenziale.

Funzioni.

Numenclatura, operazioni, e definizioni relative alle funzioni.

Limiti di funzioni.

Teo. di unicità del limite (dim.). Teo. sulla limitatezza delle funzioni che hanno limite finito (dim.). Teorema della permanenza del segno (dim.). Teo. ponte tra i limiti di funzioni ed i limiti di successioni (dim.).

Operazioni con i limiti di funzioni (dim.).

Limiti di funzioni composte (dim.). Limiti di funzioni monotone (dim.)

Il principio di sostituzione degli infinitesimi (dim.) Il simbolo di Landau. Algebra degli o-piccoli.

Funzioni continue.

Definizione di funzione continua in un punto ed in un intervallo. Teo. sulla composizione di funzioni continue (dim.).

Proprietà locali delle funzioni continue: limitatezza locale (dim.), permanenza del segno (dim.).

Continuità delle operazioni su R (dim.). Continuità delle operazioni tra funzioni continue (dim.).

Esempi di sottoinsiemi compatti di \mathbb{R} e di \mathbb{R}^n . Definizione di insieme limitato in \mathbb{R}^n . Teo.: in \mathbb{R}^n un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato. (dim.)

Teo. l'immagine di un connesso mediante una funzione continua è un connesso (dim.). In R l'immagine mediante una funzione continua di un intervallo è un intervallo (dim.). Teorema degli zeri (dim.). Definizione di curva. Il sostegno di una curva è un connesso (dim.). Il grafico di una funzione continua su di un intervallo è un connesso (dim.). Definizione di salto di una funzione. Criterio di continuità delle funzioni monotone (dim.). Teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua definita su di un connesso (dim.) Teo.: le funzioni continue e bigettive tra intervalli sono monotone (dim.). Teorema sulla compattezza dell'immagine di una funzione continua su di uno spazio metrico compatto (dim.). Il Teorema di Weierstrass (dim.). Teorema sulla continuità dell'inversa di una funzione continua definita su di un compatto (dim.).