[versione del 5 maggio 2009]

Teoria dell'integrazione elementare

Andrea Carpignani

Dipartimento di Matematica Applicata – Università di Pisa

Per tre cose vale la pena vivere:
la matematica, la musica, l'amore.
Renato Caccioppoli

Introduzione

Misurare le lunghezze, le aree, i volumi, le masse e le densità dei corpi, sono problemi di grande importanza pratica che richiedono alcune conoscenze matematiche non del tutto banali. L'inizio dello studio matematico di questi problemi risale a parecchie migliaia di anni fa. Sappiamo che un orafo imbroglione fu pizzicato da Archimede, che misurò con precisione il titolo della lega con cui era stata confezionata una corona d'oro, determinandone (senza smontarla) la densità.

Sappiamo che l'estensione dei campi veniva misurata con grande cura, e compariva nei contratti di compravendita degli Assiro Babilonesi. Insomma gli antichi avevano abbastanza strumentazione e conoscevano abbastanza geometria piana e dello spazio per dare definizioni precise ed accurate delle lunghezze, delle aree e dei volumi: sufficienti comunque per tutti gli usi pratici. Mentre, per fare un confronto con un problema in un certo senso simile, per una misura accurata del tempo, necessaria per le grandi navigazioni e per lo sviluppo della cinematica, si dovette aspettare molto più tardi: mancavano, infatti, sia gli strumenti di misura (i cronometri) che le tecniche matematiche (il calcolo differenziale).

All'inizio del secolo scorso, una serie di problemi matematici riproposero il problema della misura e dell'integrazione, che ad essa è strettissimamente legata, in contesti più generali. Da un lato l'Analisi sentiva il bisogno di costruire una definizione di "integrale" che si potesse applicare a vaste classi di funzioni e che poi si comportasse bene rispetto al passaggio al limite. Dall'altro lato, la nascita di nuove branche della Matematica, come il Calcolo delle Probabilità, la Statistica Matematica e lo studio dei Processi Stocastici, avevano bisogno di una definizione generale di "misura" per costruire i loro fondamenti.

Noi ci limiteremo a costruire una teoria dell'integrazione ristretta ad una classe piuttosto povera di funzioni, ma che ha il vantaggio di essere più molto intuitiva e priva di dimostrazioni troppo astratte. Studieremo dunque, in modo rigoroso, il calcolo delle aree delle figure piane costruite come "sottografico" di una funzione assegnata. A questo scopo occorrerà scegliere una classe di funzioni, sia pur povera, ma sufficientemente ampia da permettere di calcolare esplicitamente l'area in tutti i casi che hanno una certa rilevanza nelle applicazioni; dimostreremo quindi alcuni teoremi che permettono di calcolare effettivamente l'area di questa regione piana o, equivalentemente, che ci permettano di calcolare gli integrali.

1. L'integrale delle funzioni elementari

Sia A una parte non vuota di $\mathbb{R}$. Si denoterà con I_A e si chiamerà la ***funzione indicatrice*** (o, semplicemente, l'***indicatrice***) di A la funzione reale che vale 1 su tutti i punti di A e che vale 0 altrove. In simboli:

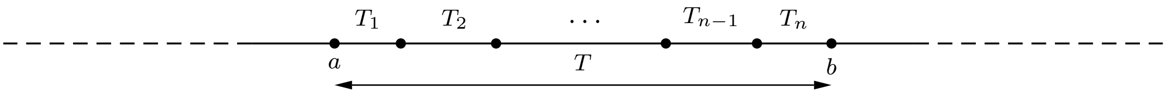
$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

In particolare, si riconosce immediatamente che l'indicatrice della retta reale coincide con la funzione costante 1 mentre l'indicatrice dell'insieme vuoto coincide con la funzione costante 0.

Se T è un intervallo della retta reale $\mathbb{R}$, i cui estremi possiamo indicare con a e b (con $a \leq b$), poniamo

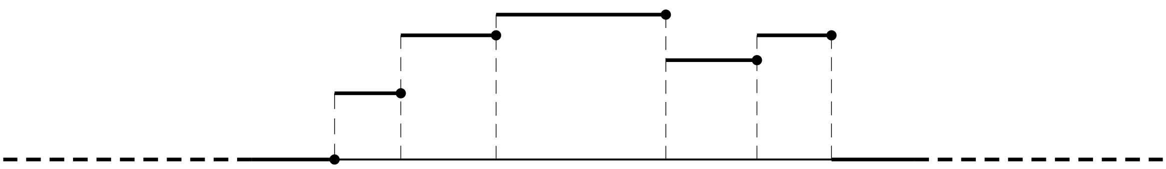
$$m(T) = b - a$$

che chiameremo la ***misura*** dell'intervallo T. È abbastanza evidente che la funzione m, che ad ogni intervallo associa un numero reale (eventualmente 0 se l'intervallo è ridotto ad un punto), gode della proprietà di ***additività*** nel senso che se T è un intervallo e se $(T_1, \ldots, T_n)$ è una partizione finita di T costituita da intervalli, allora risulta $m(T) = \sum_i m(T_i)$. (Ricordiamo che una ***partizione*** di un dato insieme è un insieme di parti di quell'insieme a due a due disgiunte, la cui riunione coincide con l'insieme dato.) La dimostrazione di questo fatto è immediata e, del resto, facilmente intuibile dalla figura sottostante:



Chiameremo una ***partizione elementare*** ogni partizione finita $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ di $\mathbb{R}$ costituita dagli intervalli limitati $T_1, \ldots, T_n$ e dal complementare T_0 della loro riunione. Nel caso della figura si tratta di una partizione elementare pur di chiamare T_0 il complementare di T. È facile riconoscere che, date due partizioni di questi tipo, ne esiste sempre una terza *più fine* delle altre due, nel senso che esiste una partizione i cui intervalli saranno tutti intervalli contenuti negli intervalli delle due partizioni elementari di partenza.

Diremo che una funzione reale f è una ***funzione elementare*** se esiste una partizione elementare $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ che sia ***compatibile*** con la funzione f, nel senso che f risulta nulla su T_0 e costante su ciascuno degli intervalli $T_1, \ldots, T_n$.



È facile riconoscere che una siffatta funzione f si possa scrivere nella forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{T_i}(x) \tag{1.1}$$

pur di denotare con a_i il valore costante che la funzione f assume sull'intervallo T_i. È evidente che se f è una funzione elementare, tali sono anche cf (qualunque sia il numero reale c) e la stessa cosa vale per $|f|$. Se, poi, f e g sono due funzioni elementari, e se scegliamo due partizioni elementari con esse rispettivamente compatibili, ogni partizione elementare più fine di entrambe le partizioni scelte è compatibile *simultaneamente* con la funzione f e con la funzione g, dunque anche con la funzione $f + g$. Ciò mostra che la classe $\mathcal{E}$ costituita da tutte le funzioni elementari forma uno spazio vettoriale. Grazie alla relazione (1.1) questo spazio vettoriale (di dimensione infinita) può anche essere caratterizzato come lo spazio vettoriale generato dalle tutte le funzioni indicatrici degli intervalli *limitati*. Un'altra proprietà di questo spazio vettoriale è che esso è ***reticolato*** nel senso che, se f e g sono due funzioni elementari, se abbiamo scelto una partizione elementare $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ compatibile con entrambe le funzioni, e se a_i e b_i denotano rispettivamente i valori costanti che f e g assumono su questa partizione elementare, allora sono semplici anche le funzioni $f \vee g$ e $f \wedge g$ definite da

$$f \vee g = \sum_{i=1}^{n} (a_i \vee b_i) I_{T_i}, \qquad f \wedge g = \sum_{i=1}^{n} (a_i \wedge b_i) I_{T_i}.$$

Assegnata ora una funzione elementare f della forma (1.1), si chiama l'***integrale*** di f il numero reale $L(f)$ così definito:

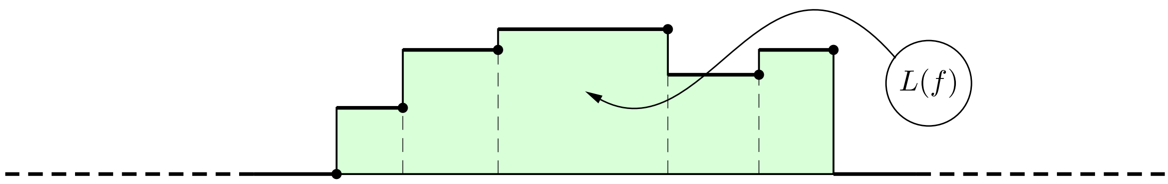
$$L(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, m(T_i). \tag{1.2}$$

È facile ricnoscere che la precedente definizione non è ambigua, cioè che il valore del secondo membro dell'espressione (1.2) dipende soltanto da f e non dalla scelta della partizione elementare $(T_0, T_1, \dots, T_n)$. Per riconoscere questo fatto basta osservare che tale valore non muta quando si passi ad una partizione *più fine* e ciò è dovuto alla proprietà di additività di m.

Se, in particolare, T è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, applicando la precedente definizione alla funzione indicatrice di T, per la quale una partizione elementare compatibile è la partizione (T, T^c), si trova:

$$L(I_T) = m(T).$$

Geometricamente, questo significa che il numero $L(I_T)$ rappresenta l'area del rettangolo avente come base T ed altezza eguale ad 1. Questa osservazione può essere generalizzata ad una qualsiasi funzione elementare *positiva*: il numero $L(f)$ rappresenta l'*area* della regione delimitata dall'asse reale e dalla funzione elementare f. La figura sottostante evidenzia proprio questa caratteristica geometrica.



L'integrale di una funzione elementare gode delle proprietà seguenti:

(1.1) *Per ogni funzione elementare f, risulta $f \geq 0 \;\Rightarrow\; L(f) \geq 0$.*

(1.2) *Per ogni numero reale c e ogni funzione elementare f, si ha $L(cf) = cL(f)$.*

(1.3) *Per ogni coppia f, g di funzioni elementari, si ha $L(f+g) = L(f) + L(g)$.*

Le prime due di queste proprietà sono ovvie. Per dimostrare la terza, basta considerare una partizione elementare $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ che sia simultaneamente compatibile con f e con g in modo da poter fare la somma su ciascun intervallo della partizione elementare.

Osserviamo che, dalle proprietà appena elencate, discende la seguente proprietà di ***isotonia*** dell'integrale, dalla quale si può considerare la (1.1) come caso particolare:

$$f \leq g \;\Rightarrow\; L(f) \leq L(g).$$

2. L'integrale superiore e l'integrale inferiore

Ciascuna delle funzioni f considerate nel seguito s'intenderà, oltre che essere definita su tutta la retta reale $\mathbb{R}$, anche *limitata* e nulla al di fuori di un opportuno intervallo limitato T (dipendente da f). È chiaro che una siffatta funzione è compresa tra due funzioni della forma aI_T, e quindi tra due funzioni della classe $\mathcal{E}$ delle funzioni elementari.

Data una funzione f l'estremo inferiore dei numeri della forma $L(g)$, al variare di g nell'insieme di tutte le funzioni della classe $\mathcal{E}$ maggioranti la funzione f, si chiamerà l'***integrale superiore*** di f e si denoterà con $L^\star(f)$. Analogamente, si chiamerà l'***integrale inferiore*** di f, e si denoterà con $L_\star(f)$, l'estremo superiore dei numeri della forma $L(g)$, al variare di g nell'insieme delle funzioni della classe $\mathcal{E}$ minoranti f. In simboli:

$$L^\star(f) = \inf\big\{L(g) : g \in \mathcal{E} \wedge f \leq g\big\}, \qquad L_\star(f) = \sup\big\{L(g) : g \in \mathcal{E} \wedge g \leq f\big\}.$$

Dalla proprietà di isotonia dell'integrale per le funzioni elementari discende la diseguaglianza:

$$L_\star(f) \leq L^\star(f).$$

Sussiste inoltre la relazione

$$L_\star(f) = -L^\star(-f) \tag{2.1}$$

la quale consente di ricondurre le proprietà dell'integrale inferiore a quelle dell'integrale superiore. Per dimostrarla, basta osservare che, al variare di g nell'insieme delle funzioni della classe $\mathcal{E}$ minoranti f, la funzione $-g$ descrive l'insieme delle funzioni, sempre della classe $\mathcal{E}$, maggioranti $-f$, e che, per ogni funzione g della classe $\mathcal{E}$, risulta $L(-g) = -L(g)$.

Proprietà dell'integrale superiore. *Siano f, g due funzioni, e c un numero reale positivo. Valgono allora le seguenti relazioni:*

(a) $f \leq g \;\Rightarrow\; L^\star(f) \leq L^\star(g)$

(b) $L^\star(cf) = cL^\star(f)$

(c) $L^\star(f+g) \leq L^\star(f) + L^\star(g)$

Proprietà dell'integrale inferiore. *Siano f, g due funzioni, e c un numero reale positivo. Valgono allora le seguenti relazioni:*

(a) $f \leq g \;\Rightarrow\; L_\star(f) \leq L_\star(g)$

(b) $L_\star(cf) = cL_\star(f)$

(c) $L_\star(f+g) \geq L_\star(f) + L_\star(g)$

Dimostrazione. Grazie all'eguaglianza (2.1), basterà dimostrare le proprietà soltanto per l'integrale superiore. È una verifica semplicissima, infatti, notare che le proprietà dell'integrale inferiore si deducono da quelle dell'integrale superiore applicando la (2.1). Incominciamo dunque con l'osservare che la proprietà (a) (detta di ***isotonia***) è una conseguenza immediata della definizione di integrale superiore. Quanto alla proprietà (b), essa è evidente nel caso in cui sia $c = 0$. Supposto dunque che sia $c > 0$, basta osservare che, al variare di ϕ nell'insieme delle funzioni della classe $\mathcal{E}$ maggioranti f, la funzione $c\phi$ descrive l'insieme delle funzioni della classe $\mathcal{E}$ maggioranti cf e che, per ogni funzione ϕ della classe $\mathcal{E}$, risulta $L(c\phi) = cL(\phi)$. Dimostriamo infine la proprietà (c). Per questo, fissiamo arbitrariamente due numeri reali, diciamo a e b, con $L^\star(f) < a$ e $L^\star(g) < b$, e proviamo che risulta $L^\star(f+g) < a+b$. Infatti, per la definizione d'integrale superiore, esistono due funzioni ϕ e ψ entrambe appartenenti alla classe $\mathcal{E}$, maggioranti f e g rispettivamente, e verificanti la relazione $L(\phi) < a$ e $L(\psi) < b$. Poiché la funzione $\phi+\psi$ appartiene alla classe $\mathcal{E}$ e maggiora $f+g$, si ha $L^\star(f+g) \leq L(\phi+\psi) = L(\phi) + L(\psi) < a+b$. L'arbitrarietà di a e di b, permette allora di concludere. ■

3. Le funzioni integrabili

Rimaniamo nelle ipotesi del paragrafo precedente e consideriamo una funzione f, definita su tutto $\mathbb{R}$, limitata e nulla al di fuori di un opportuno intervallo limitato. Diremo che f è ***integrabile*** se accade che il suo integrale superiore coincide con il suo integrale inferiore, ossia se accade che $L^\star(f) = L_\star(f)$. In tal caso, il comune valore dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore si chiama l'***integrale*** di f e si denota con uno dei simboli seguenti:

$$L(f), \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

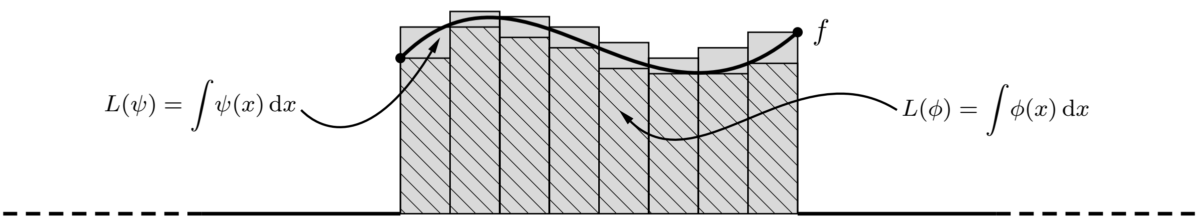
Osserviamo subito che, nella scrittura $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, la variabile x è *muta*, nel senso che può essere scelta liberamente ed, eventualmente, sostituita con un simbolo più appropriato al contesto in esame. La prima di queste notazioni è coerente con quella adottata per l'integrale delle funzioni elementari (cioè della classe $\mathcal{E}$), infatti, è chiaro che ogni funzione elementare f è integrabile e che il comune valore del suo integrale superiore e del suo integrale inferiore è null'altro che l'integrale di f definito da (1.2). Adotteremo quindi la notazione più comune $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ anche per le funzioni di questa classe non correndo assolutamente il rischio d'incorrere in ambiguità.

Dalle proprietà dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore discendono semplicemente le proprietà delle funzioni integrabili e dell'integrale.

Proprietà dell'integrale. *Se f, g sono due funzioni integrabili, tali sono cf (per ogni numero reale c) e $f+g$. Inoltre, risulta:*
(a) $L(cf) = cL(f)$
(b) $L(f+g) = L(f) + L(g)$
(c) $f \leq g \ \Rightarrow\ L(f) \leq L(g)$

Dimostrazione. Dalla proprietà (b) dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore discende subito che, per ogni numero reale c positivo si ha $L_\star(cf) = cL(f) = L^\star(cf)$. Da questa relazione, unita all'eguaglianza $L_\star(-f) = -L(f) = L^\star(-f)$ discende che, qualunque sia il numero reale c, la funzione cf è integrabile ed ha come integrale $cL(f)$. Dalla proprietà (c) dell'integrale superiore e dalla stessa per l'integrale inferiore discende poi immediatamente la diseguaglianza $L^\star(f+g) \leq L(f) + L(g) \leq L_\star(f+g)$ che dimostra che la funzione $f+g$ è integrabile ed ha, come si voleva, integrale eguale a $L(f+g) = L(f) + L(g)$. Infine, la proprietà (c) discende semplicemente dall'analoga proprietà di isotonia dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore. ■

Geometricamente, la definizione di funzione integrabile ha un'interpretazione interessante in termini di area. Supponiamo che f sia una funzione integrabile *positiva*. Ciò vuol dire che il suo integrale $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ è approssimato dall'alto dall'integrale di un'opportuna funzione elementare ψ, e dal basso dall'integrale di un'altra funzione elementare ϕ. Senza ledere la generalità, possiamo supporre che le due funzioni elementari in esame siano simultaneamente compatibili con una partizione elementare dell'intervallo in cui f è generalmente non nulla e che esse siano positive. Gli integrali di queste due funzioni elementari, come abbiamo già detto, rappresentano l'area sottesa dal loro grafico e quindi approssimano per eccesso e per difetto l'area sottesa dalla funzione positiva f. La figura seguente dovrebbe chiarire questa interpretazione.



Fino a questo momento abbiamo soltanto definito quando una funzione è integrabile. Adesso però occorre costruire dei criteri per riconoscere quando una funzione è integrabile senza dover calcolare gli estremi superiori ed inferiori degli integrali di funzioni elementari. A questo proposito è utile il seguente risultato che, peraltro, fornisce come corollario l'integrabilità di una classe abbastanza vasta di funzioni integrabili.

Criterio fondamentale d'integrabilità. *Sia f una funzione reale, limitata e nulla al di fuori di un intervallo T. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia integrabile è che, per ogni numero reale ε strettamente positivo esistano due funzioni elementari ψ e ϕ, con $\phi \leq f \leq \psi$ tali che risulti $L(\psi) - L(\phi) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Che la condizione sia necessaria è evidente: infatti, per definizione di estremo superiore e di estremo inferiore, se risulta $L^\star(f) = L_\star(f)$, comunque si scelga un numero reale ε strettamente positivo, esistono due funzioni elementari ϕ e ψ, con $\phi \leq f \leq \psi$ e tali che sia $L(\psi) - \varepsilon/2 < L(f) < L(\phi) + \varepsilon/2$. Viceversa, se sussiste la condizione del teorema, allora, fissato un numero reale ε strettamente positivo, per le proprietà di isotonia dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore, si ha $L^\star(f) \leq L(\phi)$ e $L_\star(f) \geq L(\psi)$. D'altro canto, sottraendo membro a membro si ottiene $L^\star(f) - L_\star(f) < L(\psi) - L(\phi) < \varepsilon$ e dunque, per l'arbitrarietà di ε, si ottiene $L^\star(f) = L_\star(f)$ cioè che f è integrabile. Il criterio è così dimostrato. ■

Possiamo ora utilizzare questo criterio per dimostrare che ogni funzione continua definita su un intervallo limitato e chiuso è integrabile. Naturalmente, per le ipotesi che abbiamo fatto, supporremo che la funzione sia in realtà definita su tutta la retta reale, prolungandola a zero al di fuori dell'intervallo di definizione (e ciò ne distrugge la continuità globale).

Teorema sull'integrabilità delle funzioni continue. *Sia f una funzione reale, definita su $\mathbb{R}$, continua su un intervallo limitato e chiuso T e nulla al di fuori di tale intervallo. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Fissiamo un numero reale ε strettamente positivo. Poiché f è continua in un intervallo limitato e chiuso essa è, in particolare, uniformemente continua. Esiste dunque un numero reale δ strettamente positivo tale che, per ogni coppia x, y di elementi dell'intervallo T, con $|x - y| < \delta$, sia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sfruttiamo questa proprietà per costruire due funzioni elementari che soddisfino al criterio fondamentale d'integrabilità. A questo scopo, fissiamo una partizione di $\mathbb{R}$ con $T_0 = T^c$ e tale che gli elementi della partizione $T_1, \ldots, T_n$ abbiano misura $m(T_i)$ eguale al minimo tra δ e $1/n$. Per ciascun indice i denotiamo con a_i il massimo valore di f su T_i e con b_i il minimo valore di f su T_i. Per la proprietà di uniforme continuità, allora, si può scegliere δ in maniera tale che sia $a_i - b_i < \varepsilon$. Definiamo dunque le funzioni elementari

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{T_i}, \qquad \phi = \sum_{i=1}^{n} b_i I_{T_i}.$$

La differenza degli integrali, allora, è tale che risulti $L(\psi) - L(\phi) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)m(T_i) < \varepsilon$. Il criterio fondamentale d'integrabilità ci permette allora di concludere che f è integrabile. ■

Concludiamo il paragrafo osservando che, se f è una funzione reale, definita su $\mathbb{R}$, la quale sia diversa da zero soltanto in un numero *finito* di punti, allora essa è combinazione lineare finita di indicatrici di intervalli degeneri (ridotti ad un sol punto); pertanto f è una funzione elementare ed ha integrale nullo. Come conseguenza di questo fatto, due funzioni che differiscono soltanto in un numero finito di punti hanno lo stesso integrale.

4. Integrale esteso ad un insieme

Sia f una funzione reale, definita in una parte non vuota T di $\mathbb{R}$ e sia A un insieme contenuto in T. La funzione $I_A f$ si potrà dunque pensare come ad una funzione definita su tutta la retta reale, generalmente non nulla nell'insieme A e nulla altrove. Se questa nuova funzione è integrabile, si dice che f è ***integrabile sull'intervallo*** A. In tal caso, l'integrale della funzione $I_A f$ si denota con $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ e si chiama l'***integrale di*** f ***esteso all'insieme*** A. È chiaro che, per le proprietà della funzione indicatrice, se A e B sono due insiemi disgiunti entrambi contenuti nell'insieme T di definizione di f, allora risulta $I_{A\cup B} f = I_A f + I_B f$. Pertanto se la funzione è integrabile su ciascuno dei due insiemi A e B, essa è integrabile sulla loro riunione e risulta

$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In particolare, se A è un intervallo limitato, e se a e b (con $a \leq b$) ne designano gli estremi, in luogo della notazione $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$, si usa di preferenza la notazione più comoda e usuale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Quest'ultima notazione potrebbe apparire ambigua, non permettendo ad esempio di distinguere tra l'integrale esteso all'intervallo chiuso $[a,b]$ da quello esteso all'intervallo aperto (a,b). Ma poiché le funzioni $I_{[a,b]} f$ e $I_{(a,b)} f$ differiscono al più in due punti, nessuna confusione è in realtà possibile.

Sia ora f una funzione reale definita su un intervallo T di $\mathbb{R}$, e integrabile su ogni intervallo limitato e chiuso contenuto in T. Se a, b, c sono tre elementi di T, con $a \leq c \leq b$, si ha (per le proprietà della funzione indicatrice)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Se a, b sono elementi di T, con $a > b$, poniamo *per definizione*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Si riconosce facilmente che, con questa definizione, la (4.1) sussiste per ogni terna a, b, c di elementi di T.

5. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione reale f, definita su un intervallo T di $\mathbb{R}$, si chiama una sua ***primitiva*** ogni funzione reale, definita sullo stesso intervallo, che l'ammetta come propria derivata. Si riconosce immediatamente che, se F è una primitiva per f, tale è anche ogni funzione della forma $F + c$ con $c \in \mathbb{R}$. (Basta per questo ricordare che la derivata di una funzione costante è nulla.) Viceversa, il teorema del valor medio di Lagrange permette di affermare che, se F e G sono due primitive di f, esse differiscono per una costante. Infatti, posto $H = G - F$, si riconosce immediatamente che la derivata di H è identicamente nulla. Applicando ora il teorema di Lagrange alla funzione H nel sottointervallo $[x, x']$ di T, si trae

$$\frac{H(x) - H(x')}{x - x'} = H'(\xi) = 0 \qquad \text{con} \quad x < \xi < x',$$

e tanto basta per concludere che $H(x) = H(x')$. Per l'arbitrarietà di x e di x' ne consegue che $H(x)$ è una costante. In altri termini: l'applicazione derivata $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ vista come un'applicazione di $\mathcal{C}^1(T)$ in $\mathcal{C}^0(T)$ non è iniettiva ed il suo nucleo $\ker(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$, essendo costituito dalle funzioni costanti, è isomorfo al corpo dei numeri reali. Passando dunque allo spazio quoziente $\mathcal{C}^1(T)/\mathbb{R}$ la derivata può essere definita associando alla classe d'equivalenza $[F]$ la derivata di una sua rappresentante $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F] = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$. In questo caso, ammesso che la derivata sia suriettiva (cosa che dimostreremo tra poco) si può invertire nello spazio quoziente. La classe d'equivalenza $[F]$ le cui rappresentanti soddisfano all'equazione $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x = f$ si chiama talvolta l'***integrale indefinito*** di f e si denota, seppur con un abuso di notazione, con $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Quando si eseguono i calcoli, dunque, occorre stare ben attenti a cosa s'intende con il simbolo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ perché a seconda dei casi esso può voler dire l'integrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ oppure la classe d'equivalenza di tutte le primitive di f.

Ciò premesso, siamo in grado di dimostrare questo celebre risultato.

Teorema fondamentale del calcolo integrale. *Sia f una funzione reale definita su un intervallo T (non ridotto ad un sol punto) ed ivi* ***continua****. Sia x_0 un qualsiasi elemento di T e poniamo*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora la funzione F è una primitiva di f.

Dimostrazione. Sia x un elemento di T. Dimostriamo che F è derivabile in x ed ha per derivata il numero $f(x)$. A questo scopo osserviamo che il rapporto incrementale di F nel punto x si può scrivere, grazie alla definizione (4.2) e alla proprietà (4.1), nella forma

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

Siccome f è per ipotesi continua nel punto x, comunque si prenda un numero reale ε strettamente positivo, esiste un numero reale δ anch'esso strettamente positivo, tale che, per ogni numero reale t, con $0 < |t-x| < \delta$ si abbia

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon. \tag{5.2}$$

Ne segue che, per ogni numero reale h, con $0 < |h| < \delta$, se t è compreso tra x e $x+h$, si ha anche $0 < |t-x| < |h| < \delta$ e dunque vale la (5.2). Per l'isotonia dell'integrale, allora, risulta

$$f(x) - \varepsilon < \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t < f(x) + \varepsilon$$

o, ciò ch'è lo stesso, per definizione di limite, il rapporto incrementale (5.1) converge verso il numero $f(x)$ al tendere di h verso zero. Ciò basta per concludere che F è derivabile nel punto x ed ha il numero $f(x)$ come derivata, proprio come volevamo dimostrare. ■

L'importanza del teorema fondamentale del calcolo integrale è che esso mette in relazione due concetti apparentemente distanti (quello di integrale e quello di primitiva) e mostra, tra l'altro, l'esistenza (per ogni funzione reale, continua su un intervallo di $\mathbb{R}$) di una primitiva. In altri termini il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che l'applicazione $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ di $\mathcal{C}^1(T)$ in $\mathcal{C}^0(T)$ è suriettiva. Nella pratica, comunque, il teorema fondamentale è utilizzato soprattutto per calcolare un integrale quando si conosca già una primitiva della funzione da integrare. Il modo con cui esso viene usato è riposto nel seguente corollario di dimostrazione immediata.

Corollario. *Nelle stesse ipotesi del teorema fondamentale del calcolo integrale, siano a e b due punti appartenenti all'intervallo T. Sia poi G una* qualsiasi *primitiva di f. Si ha allora*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

Nell'applicare questo corollario, la differenza $G(b) - G(a)$ si suole indicare una la notazione seguente (dove, al solito, la lettera x ha l'ufficio di una variabile muta): $\big[G(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Inoltre, l'insieme di tutte le primitive della funzione f, come abbiamo già osservato, è la classe d'equivalenza di una primitiva modulo $\mathbb{R}$. Ora, per il teorema fondamentale del calcolo esiste una primitiva "privilegiata" cioè quella scritta come integrale della funzione $f(x)$. Si ha dunque che il cosiddetto "integrale indefinito" è l'insieme delle funzioni

$$F_c(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

È utile, a questo punto riportare in una tabella una primitiva delle funzioni di uso più comune. Il metodo con cui si ricava la tabella è semplicissimo: si utilizza la già nota tabella delle derivate d'uso comune, e si cerca di risolvere l'equazione $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x = f(x)$ tenendo conto del fatto che la funzione $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ è lineare.

Tabella riassuntiva delle primitive più importanti

$f(x)$	$F(x)$
0	c
x^n con $n \neq -1$ intero	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
x^a con $a \neq -1$ reale	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$1/x$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$

6. Teorema di integrazione per parti e teorema d'integrazione per sostituzione

Dal teorema fondamentale del calcolo discendono la regola di integrazione detta "per parti" e la regola di integrazione "per sostituzione" (o "per cambiamento di variabili") che risultano molto utili nel calcolo pratico degli integrali e che sono espresse dai due teoremi seguenti.

Teorema d'integrazione per parti. *Siano f e g due funzioni reali, continue, definite nell'intervallo T, ammettenti rispettivamente F e G come primitive. Per ogni coppia a, b di elementi di T, si ha allora*

$$\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)G(x)\big]_{x=a}^{x=b}. \tag{6.1}$$

Dimostrazione. Dalla regola di derivazione di un prodotto (regola di Leibniz) discende:

$$(FG)' = fG + Fg.$$

La funzione continua $fG + Fg$ ammette dunque come primitiva la funzione FG. La tesi si ottiene allora applicando il corollario del teorema fondamentale del calcolo. ■

Osserviamo che, nella pratica, la relazione (6.1), scritta nella forma

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)G(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

consente di calcolare l'integrale della funzione Fg qualora:

1) si conosca una primitiva G della funzione g;
2) si sappia calcolare l'integrale della funzione fG;

sostituendo il primo fattore con la sua derivata f ed il secondo fattore con la sua primitiva G.

- **Esempio.** *Si voglia calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

  Esso si può mettere nella forma richiesta dal teorema d'integrazione per parti, ovvero nella forma $\int_1^2 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, pur di porre: $F(x) = \ln x$ e $g(x) = 1$. Poiché la derivata della funzione F è la funzione $f(x) = 1/x$, mentre una primitiva della funzione g è la funzione $G(x) = x$, l'integrale proposto è facilmente calcolabile, in quanto riconducibile all'integrale della funzione $f(x)G(x) = x \cdot 1/x = 1$. Facendo i debiti conti, si trova, precisamente:

  $$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \big[x\ln x\big]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.$$

Teorema d'integrazione per sostituzione. *Siano T e S due intervalli della retta reale $\mathbb{R}$, e sia φ un'applicazione di S in T, derivabile, con derivata continua. Per ogni funzione reale f, definita su T, continua, e per ogni coppia α, β di elementi di S risulta*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

dove abbiamo posto $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$.

Dimostrazione. Sia F una primitiva della funzione continua f. La funzione $F \circ \varphi$ è allora una primitiva della funzione continua $(f \circ \varphi)\varphi'$. Applicando due volte il corollario del teorema fondamentale si ottiene dunque:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \big[(F\circ\varphi)(t)\big]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tanto basta per concludere. ■

Osserviamo che, nella pratica, la relazione (6.2) si applica in entrambi i sensi: cioè per calcolare il primo membro riconducendolo al secondo, oppure, viceversa, per calcolare il secondo membro riconducendolo al primo.

- **Esempio.** *Si voglia calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

  Poniamo $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$, quindi risulta $\varphi'(t) = \cos t$. Inoltre, per gli estremi d'integrazione, abbiamo $a = \operatorname{sen} 0 = 0$ e $b = \operatorname{sen}(\pi/2)$. Dunque risulta

  $$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

- **Esempio.** *Si voglia calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \, \cos t \, \mathrm{d}t.$

  Poniamo $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$ e quindi $\varphi'(t) = \cos t$. Ne ricaviamo

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \, \cos t \, \mathrm{d}t = \int_{\operatorname{sen} 0}^{\operatorname{sen} \pi/2} x^3 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}.$$

Giova forse far notare al lettore una forma, sia pur errata formalmente, molto semplice per ricordarsi il cambiamento di variabili. Se si conviene di porre $x = \varphi(t)$, allora si potrà scrivere anche $\mathrm{d}x = \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$. Inoltre, ricordiamolo, le variabili x e t sono "mute" e possono essere rimpiazzate con altre variabili qualsiasi purché stando attenti a non utilizzare delle variabili che non sono mute e che, d'altra parte, fanno già parte della formula.

A partire dal teorema d'integrazione per sostituzione, si può creare un'altra formula piuttosto utile quando si ha a che fare con gli integrali delle "funzioni inverse" delle funzioni note. A questo scopo, supponiamo che f sia una funzione reale definita e derivabile su T e supponiamo che essa sia invertibile nell'intervallo $[a, b]$. Poniamo anche $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$. Per sostituzione, allora, ponendo $\varphi(t) = f(t)$, si dimostra immediatamente la formula:

$$\int_a^b f^{-1}(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta t f'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Questa formula può essere ulteriormente migliorata se utilizziamo anche il teorema d'integrazione per parti:

$$\int_a^b f^{-1}(x) \, \mathrm{d}x = \big[t f(t)\big]_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_\alpha^\beta f(t) \, \mathrm{d}t.$$

- *Si voglia calcolare l'integrale* $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$

  Evidentemente si tratta di calcolare l'integrale della funzione inversa di $f(x) = \operatorname{tg} x$. Per questo scopo, volendo utilizzare la formula appena scritta, osserviamo che si ha $1 = \operatorname{tg}(\pi/4)$ e $0 = \operatorname{tg} 0$, dunque

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x &= \big[t \operatorname{tg} t\big]_{t=0}^{t=\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4} + \big[\ln \cos t\big]_{t=0}^{t=\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$