

Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA 2 - A.A. 2014-2015 -

PROGRAMMA SVOLTO NEL CORSO

Equazioni differenziali ordinarie

Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie. Definizione di soluzione. Teorema di esistenza di soluzione per il problema di Cauchy per le equazioni a variabili separabili. Metodi di risoluzione delle equazioni a variabili separabili.

Dimostrazione del teorema sulla struttura delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Dimostrazione della formula risolutiva dell'equazione e del problema di Cauchy.

Teorema sull'esistenza ed unicità di soluzione del problema di Cauchy di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Dimostrazione del teorema sulla struttura delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine e della dimensione dello spazio delle soluzioni dell'omogenea. Dimostrazione del teorema sul wronskiano. Determinazione delle soluzioni dell'equazione omogenea a coefficienti costanti con il metodo del polinomio caratteristico. Risoluzione della non omogenea nel caso di dato funzione polinomiale, esponenziale o del tipo sin e cos. Metodo di variazione delle costanti arbitrarie per la risoluzione dell'equazione non omogenea.

Calcolo infinitesimale per le curve.

Richiami di calcolo vettoriale: prodotto scalare, prodotto vettoriale, norme in \mathbb{R}^n e relative proprietà. Definizione di limite e continuità per le funzioni a valori vettoriali. Curve regolari e calcolo differenziale vettoriale: definizione di curva continua relativa nomenclatura. Definizione di derivata di funzione vettoriale, di arco di curva regolare e relativa proprietà. Integrale di una funzione a valori vettoriali: Teorema fondamentale del calcolo integrale, assoluta continuità dell'integrale. Definizione di curva rettificabile e formula per il calcolo della lunghezza di una curva. Parametro arco o ascissa curvilinea, integrali di linea di prima specie. Elementi di geometria differenziale delle curve: curvatura e normale principale delle curve. Dimostrazione del teorema sulle curve a modulo costante. Definizione di normale principale e curvatura rispetto al parametro arco. Ragione di curvatura. Normale principale rispetto a un parametro qualsiasi. Dimostrazione della decomposizione dell'accelerazione. Dimostrazione delle formule per il calcolo della curvatura per curve in \mathbb{R}^3 o nel piano.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Grafici e insiemi di livello. Definizione di limite e di funzione continua. Esempi di risoluzione dei casi di indeterminazione nel calcolo dei limiti. Topologia in \mathbb{R}^n : definizione di intorno sferico, di punto interno ed esterno, di insieme chiuso, aperto, di intorno e di frontiera. Proprietà. Dimostrazione delle operazioni insiemistiche sugli aperti e sui chiusi. Limiti di successioni. Dimostrazione del teorema sulla chiusura e sui limiti di successioni. Definizione di insieme limitato e di connesso. Dimostrazione delle proprietà delle controimmagini di una funzione continua. Teorema di Weierstrass. Dimostrazione del teorema degli zeri.

Definizione di derivata parziale e di gradiente. Il piano tangente. definizione di differenziale. Dimostrazione della relazione tra differenziale e gradiente. Dimostrazione della condizione sufficiente per la differenziabilità. Definizione di derivata direzionale. Dimostrazione della formula del gradiente per il calcolo della derivata direzionale. Direzione di massima e di minima crescita. Formule di calcolo delle derivate. Dimostrazione delle formule per il calcolo delle derivate di funzioni composte. Gradiente di una funzione radiale e ortogonalità del gradiente alle curve di livello. Derivate di ordine superiore: il teorema di Schwarz. Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Peano e di Lagrange. La matrice hessiana.

Definizione di massimo e di minimo relativo. Dimostrazione del teorema di Fermat. Ricerca dei massimi e dei minimi reattivi. Richiamo sulle forme quadratiche e sugli autovalori delle matrici. Dimostrazione del teorema sull'hessiano (studio della natura dei punti critici). Funzioni convesse: definizione e proprietà. Relazione tra convessità e piano tangente, convessità e matrice hessiana, convessità e minimo. Le funzioni definite implicitamente: dimostrazione del teorema del Dini. Studio delle linee di livello.

Calcolo differenziale per le funzioni di più variabili a valori vettoriali

Superfici in forma parametrica. Trasformazione di coordinate.

Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: definizioni e proprietà. Superfici regolari in forma parametrica: definizione ed esempi.

Definizione di funzione invertibile. Il teorema della funzione inversa. Relazione tra lo jacobiano di una funzione e della sua inversa. Il teorema di invertibilità locale.

Massimi e minimi vincolati: dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso bidimensionale.

Calcolo integrale per funzioni di più variabili.

Definizione di integrale doppio. Formula di riduzione degli integrali doppi sui rettangoli. Definizione di insiemi semplici, regolari, misurabili. Misura di un insieme. Integrabilità delle funzioni continue. Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla. Esempi e proprietà degli insiemi di misura nulla. Integrabilità di alcuni tipi di funzioni discontinue. Proprietà degli integrali doppi. Calcolo degli integrali doppi con il metodo di riduzione su domini semplici. Formula per il cambio di variabile negli integrali doppi. Integrali doppi generalizzati.

Integrali tripli. Integrazione per fili e per strati. Formula per il cambio di variabile negli integrali tripli. esempi di cambio di variabili: coordinate cilindriche, sferiche e omotetiche. Il volume di un solido di rotazione.

Campi vettoriali

Campi scalari e campi vettoriali. Gradiente, rotore e divergenza: proprietà e dimostrazione delle identità differenziali. Integrali di linea di un campo vettoriale (di prima e di seconda specie). Definizione di lavoro di un campo vettoriale. definizione di campo conservativo e di potenziale. Dimostrazione della formula per il calcolo del lavoro di un campo conservativo. Dimostrazione del teorema sulla non dipendenza dal cammino per il calcolo del lavoro di un campo conservativo.

Definizione di dominio semplicemente connesso. Condizione necessaria e sufficiente perché un campo irrotazionale sia conservativo. Equivalenza tra la nomenclatura di campi vettoriali e delle forme differenziali.

Dimostrazione della formula di Gauss-Green nel piano per un dominio semplice rispetto all'asse y . Formula di Gauss-Green per domini generali. Applicazione della formula al calcolo delle aree di domini piani.

Formula per il calcolo dell'area di una superficie in \mathbb{R}^n . Esempi di calcolo di aree di superfici cartesiane e di rotazione. Integrale di superficie di una funzione continua. Superfici orientabili, superfici con bordo. definizione di flusso di un campo vettoriale su di una superficie. Il teorema della divergenza o di Gauss.

OSSERVAZIONE

Si richiede la dimostrazione dei teoremi che nell'elenco sopra esposto sono introdotti dalle parole: *dimostrazione del teorema....*".