

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

PROGRAMMA DEL CORSO - A. A. 2011 - 2012

Vocabolario della teoria degli insiemi e della logica.

Proprietà delle proposizioni e dei connettivi logici. Implicazioni. I predicati e i quantificatori. Negazione di una proposizione. Le dimostrazioni per assurdo. Significato e proprietà dei simboli della teoria degli insiemi: appartenenza, contenuto, intersezione, unione e differenza. Gli assiomi di Peano. Il principio di induzione (Dim.). Il fattoriale ed i coefficienti binomiali. La formula di Stifel. Il triangolo di Tartaglia. La formula di Newton della potenza ennesima di un binomio (Dim.).

I numeri reali.

I numeri razionali. Esistenza degli irrazionali: l'irrazionalità di radice di 2. Gli assiomi algebrici sui numeri reali. Le operazioni sui reali e loro proprietà. Gli intervalli. L'assioma di continuità. L'assioma di Archimede. Insiemi limitati della retta reale. Definizione di massimo e di minimo. Definizione di maggiorante e di minorante. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore. Caratterizzazione dell'estremo superiore ed inferiore. Esistenza dell'estremo superiore ed inferiore nei reali (Dim.). Il valore assoluto e sue proprietà. La disequaglianza triangolare (Dim.).

I numeri complessi.

Forma algebrica dei numeri complessi. Definizione e proprietà di complesso coniugato e di modulo di un numero complesso. La disequaglianza triangolare (Dim.). Il piano di Gauss. Forma trigonometrica. La Formula di De Moivre. Formula per il calcolo della radice ennesima di un numero complesso (Dim.). Forma esponenziale di un complesso.

La topologia della retta reale.

Definizione di distanza in \mathbb{R} . Definizione di spazio metrico. Definizione di punto interno di frontiera ed esterno. La struttura di spazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Il prodotto scalare e la norma. La disequaglianza triangolare per le norme (Dim.). La disequaglianza triangolare per le distanze. Definizione di intorno. Parte interna, esterna e frontiera di un insieme. Definizione di insieme chiuso e di insieme aperto. Un insieme è aperto se e solo se non contiene nessun punto di frontiera (Dim.). Chiusura di un insieme. Teoremi sull'intersezione e l'unione di chiusi e di aperti (Dim.). Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera (Dim.). La chiusura di un insieme è il più piccolo insieme chiuso che lo contiene (Dim.). Definizione di punto di accumulazione. Derivato di un insieme. Un insieme chiuso contiene tutti i suoi punti di accumulazione (Dim.). Densità dei razionali nei reali (Dim.). Il teorema di Bolzano-Weierstrass (Dim.). Ogni sottoinsieme di \mathbb{R} ha un punto di frontiera (Dim.).

Le funzioni reali.

Nomenclatura relativa alle funzioni reali: dominio, codominio, immagine, immagine inversa, iniettività, surgettività, funzione inversa, composizione, monotonia, restrizioni. Grafici delle funzioni elementari. Inverse delle funzioni trigonometriche. Definizione di funzione limitata superiormente ed inferiormente. Definizione di estremo superiore ed inferiore di una funzione. Massimi e minimi di funzioni. Caratterizzazione dell'estremo superiore ed inferiore di una funzione. Definizione di successione reale e di successione estratta.

Limiti di funzioni.

Definizione generale di limite di funzione e sua esplicitazione nei vari casi (limite finito, infinito, ecc.). Operazioni con i limiti (Dim.). Casi di indeterminazione. Teorema della permanenza del segno (Dim.). Teorema di unicità del limite (Dim.). Teorema del confronto (Dim.). Esempi di calcolo di alcuni limiti notevoli. Limite destro e sinistro. Teorema sui limiti di funzioni monotone (Dim.). Esempi di calcolo degli asintoti di una funzione.

Limiti di successioni.

Definizione di limite di una successione. Definizione di sottosuccessione o successione estratta. Le successioni convergenti sono limitate (Dim.). Da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente

(Dim.). Definizione di insieme compatto. Teorema sui limiti di successioni monotone (Dim.). Il numero e . Le successioni definite per ricorrenza. Definizione di successione di Cauchy. Il criterio di Cauchy per la convergenza di una successione (Dim.). Le serie numeriche. Definizione di serie convergente, divergente, indeterminata, assolutamente convergente. Alcune serie notevoli: la serie geometrica, la serie armonica. Condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo (Dim.). Criterio della convergenza assoluta (Dim.). Criterio di Leibniz per le serie a termini si segno alterno (Dim.). Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto (Dim.), criterio del rapporto (Dim.), criterio della radice ennesima (Dim.), del confronto asintotico (Dim.). Enunciato del criterio del 2^k .

Funzioni continue.

Definizione di funzione continua. Continuità della composta di funzioni continue (Dim.). Cambiamento di variabile nel calcolo dei limiti. Teorema ponte tra i limiti di funzioni e i limiti di successioni (Dim.). Classificazione dei punti di discontinuità. Il principio di sostituzione degli infinitesimi (Dim.). Il simbolo di Landau. Algebra degli o -piccoli. Struttura lineare e algebra delle funzioni continue (continuità della somma, del prodotto, ecc. , di funzioni continue). Teorema della permanenza del segno (Dim.). Teorema degli zeri (Dim.). Teorema dei valori intermedi (Dim.). Teorema di Weierstrass (Dim.). Enunciato del teorema sulla continuità dell'inversa di una funzione continua. Definizione di funzione uniformemente continua. Enunciato sull'uniforme continuità delle funzioni continue definite su un compatto.

Il calcolo differenziale.

Definizione di derivata. Continuità delle funzioni derivabili (Dim.) Teoremi sulle operazioni con le derivate (Dim.). Derivazione di una funzione composta (Dim.). Derivazione dell'inversa di una funzione (Dim.). Definizione di massimo e di minimo relativo. Teorema sulla derivata in un punto di massimo o di minimo relativo (Dim.). Dimostrazione dei teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy per le derivate. Teorema sulla funzione che ha la derivata nulla su di un intervallo (Dim.). Relazione tra segno della derivata e monotonia della funzione (Dim.). I teoremi dell'Hospital (Dim.). Le derivate seconde. Definizione di funzione convessa. Dimostrazione del legame tra derivata seconda e convessità di una funzione. Dimostrazione del teorema sulle derivate seconde nei punti stazionari. Dimostrazione del legame tra retta tangente e funzione convessa. Studio del grafico di una funzione. La formula di Taylor con resto di Peano e di Lagrange (Dim.). La serie di Taylor.

L' integrale.

Definizione di integrale di Riemann. Proprietà delle funzioni integrabili (integrale della somma, ecc.). Dimostrazione della condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia integrabile secondo Riemann. Dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue. Dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni monotone. Il teorema della media integrale (Dim.). Il teorema fondamentale del calcolo integrale (Dim.). Il teorema sulle primitive (Dim.). Cambiamento di variabile negli integrali (integrale per sostituzione). Formula per l'integrazione per parti (Dim.). Calcolo degli integrali di funzioni razionali, di funzioni dipendenti da funzioni trigonometriche ed esponenziali, integrali di funzioni in cui compaiono radici. Calcolo di integrali in cui compaiono funzioni irrazionali quali il logaritmo, arcotangente, arcoseno, arcocoseno, o le funzioni iperboliche. Definizione di integrale improprio.

Le equazioni differenziali. La nomenclatura relativa alle equazioni differenziali ordinarie. Enunciato del teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine (Dim.). Risoluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili. Risoluzione delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti con il metodo del polinomio caratteristico. Risoluzione delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti con secondo membro di tipo polinomiale, trigonometrico o esponenziale.

Testi consigliati.

Enrico Giusti: *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, **terza edizione**.

G. Buttazzo - G. Gambini - E. Santi: *Esercizi di Analisi Matematica 1* Pitagora Editrice - Bologna.

Vanno comunque bene anche altri testi di esercizi di Analisi Matematica 1.