Esercizi svolti da

“Complex Algebraic Surfaces”, A. Beauville

Bla bla

16 ottobre 2018

Indice

1

2 Esercizi capitolo 2

Esercizio 2.1. *Sia C una curva irriducibile dentro una superficie S. Mostrare che esiste un morfismo $\widehat{S} \to S$ che consiste nella composizione di un numero finito di scoppiamenti per cui la trasformata stretta di C in $\widehat{S}$ sia liscia.*

Dimostrazione. Sia C una curva irriducibile dentro una superficie S. Se $C_0 = C$ è liscia di suo abbiamo finito, altrimenti possiamo scoppiare $S_0 = S$ in un punto p in cui C non è liscia ottenendo così una curva C_1 (che definiamo come la trasformata stretta di C_0) dentro S_1. Se C_1 non è liscia possiamo ripetere il procedimento. Supponendo che non sia vero che dopo un numero finito di scoppiamenti ola trasformata stretta di C sia una curva liscia, otteniamo una successione $C_k \subseteq S_k$ di curve e una successione di scoppiamenti $\epsilon_k \colon S_k \to S_{k-1}$ (con retta eccezionale E_k) per cui ciascuna C_k è la trasformata stretta tramite un scoppiamento di C_{k-1}. Usiamo la formula del genere per calcolare $g(C_k)$. Abbiamo che

$$g(C_k) = 1 + 1/2(C_k^2 + C_k.K_{S_k}) =$$
$$= 1 + 1/2(\epsilon_k^*(C_{k-1}) - n_kE_k)^2 + (\epsilon_k^*(C_{k-1}) - n_kE_k).(\epsilon_k^*(K_{S_{k-1}}) + E_k) =$$
$$= 1 + 1/2(C_{k-1}^2 + C_{k-1}.K_{S_{k-1}}) - n_k^2/2 + n_k/2 = g(C_{k-1}) - n_k^2/2 + n_k/2.$$

Poiché C_{k-1} è singolare nei punti in cui scoppiamo, abbiamo che $n_k > 1$ e quindi $g(C_k) < g(C_{k-1}) < \cdots < g(C)$ e quindi per k sufficientemente grande avremmo che $g(C_k) < 0$, il che è assurdo. □

Esercizio 2.2. *Sia C una curva irriducibile dentro S, $p \in C$ e $\widehat{C}$ la trasformata stretta di C nello scoppiamento di S di centro p. I punti infinitamente vicini a p di ordine 1 sono, per definizione, i punti di $\widehat{C}$ che stanno sopra p. La loro molteplicità è, per definizione, la loro molteplicità su $\widehat{C}$. I punti infinitamente vicini di ordine n sono i punti infinitamente vicini di ordini 1 ai punti infinitamente vicini di ordine $n-1$ a p.*

(a) *Mostrare che la molteplicità m di C in p soddisfa*

$$m = \widehat{C}.E = \sum m_x(\widehat{C} \cap E) \geqslant \sum m_x(\widehat{C}),$$

dove la somma è presa su tutti i punti infinitamente vicini a p di ordine 1. Trovare un esempio in cui valga la disuguaglianza stretta.

(b) *Se C e C' sono curve distinte e irriducibili, mostrare che*

$$m_p(C \cap C') = \sum_x m_x(C) \cdot m_x(C'),$$

dove la sommatoria è presa su tutti i punti x infinitamente vicini a p su C e C'.

(c) *Sia N la normalizzazione di C. Mostrare che*

$$g(C) = g(N) + \sum_i \frac{1}{2} m_i(m_i - 1),$$

dove m_i sono le molteplicità dei punti di C, inclusi quelli infinitamente vicini.

Dimostrazione. **(a)** Per definizione si ha che la molteplicità m di C in P è data da $m = \widehat{C}.E = \sum m_x(\widehat{C} \cap E)$. Per definizione di molteplicità di una curva in punto (che è il minimo della molteplicità di intersezione con tutte le curve passanti per il punto stesso) si ha che $m_x(\widehat{C} \cap E) \geqslant m_x(\widehat{C})$ ottenendo così

$$m \geqslant \sum m_x(\widehat{C}). \tag{1}$$

Consideriamo ora la cuspide $zy^2 - x^3$ dentro $\mathbb{P}^2$ che ha molteplicità 2 in $[0:0:1]$. Scoppiando in $[0:0:1]$ la trasformata stretta ha equazione locale $t^2 - x = 0$ (e, in queste coordinate, la rettta eccezionale ha equazione $t = 0$). Esiste quindi un unico punto infinitamente vicino a $[0:0:1]$ che ha coordinate $t = x = 0$ ed ha molteplicità 1 nella trasformata stretta. Abbiamo quindi trovato un esempio in cui la disuguaglianza 1 e stretta.

(b) Siano ora C, C' due curve in S e supponiamo, senza perdita di generalità, che $C \cap C' = \{p\}$: vogliamo mostrare che

$$m_p(C \cap C') = C.C' = \sum_x m_x(C) \cdot m_x(C') \tag{2}$$

ove la somma è presa su tutti gli x infinitamente vicini a p (incluso p stesso). Scoppiamo in p e siano $\widehat{C}$ e $\widehat{C}'$ le trasformate strette e ϵ la mappa di scoppiamento con curva eccezionale E. Allora si ha che

$$\widehat{C}.\widehat{C}' = (\epsilon^* C - m_p(C)E).(\epsilon^*(C') - m_p(C')E) = C.C' - m_p(C) \cdot m_p(C')$$

ossia

$$C.C' = \widehat{C}.\widehat{C}' + m_p(C) \cdot m_p(C') :$$

procedendo per induzione sugli scoppiamenti necessari fino ad avere che le trasformate strette di C e C' non si intersechino più, si ottiene la formula richiesta.

(c) Sia ora N la normalizzazione di C: la normalizzazione di C può essere vista come la trasformata stretta di C attraverso il numero necessario di scoppiamenti nei suoi punti singolari. Come prima ragioniamo per induzione sul numero di scoppiamenti fatti. Sia p un punto singolare C con molteplicità m. Scoppiando S in p ottengo $\epsilon \colon \widehat{S} \to S$ con curva eccezionale E. Abbiamo le seguenti uguaglianze: $\widehat{C} = \epsilon^*(C) - mE$ e $K_{\widehat{S}} = \epsilon^* K_S + E$. Quindi, con lo stesso conto fatto nell'Esempio 2.1, abbiamo che

$$g(C) = g(\widehat{C}) + m(m-1)/2.$$

Procedendo per induzione scoppiando nei punti songolari di C o delle sue trasformate strette, si ottiene la formula richiesta.

□

Esercizio 2.3. *Diciamo che una curva C su S è del secondo tipo se esiste una mappa birazionale $\phi \colon S \dashrightarrow S'$ non definita su tutta C per cui $\phi(C)$ è un punto.*

(a) *Mostrare che C è una curva razionale (possibilmente singolare) e che, con la notazione dell'esercizio precedente,*

$$C^2 = \sum m_i^2 - 1 + n, \qquad C.K = -\sum m_i - 1 - n,$$

dove $n \geqslant 0$ e $n > 0$ se C è liscia.

(b) *Sia C una curva razionale dentro S con $C^2 \geqslant \sum m_i^2 - 1$ (e $C^2 \geqslant 0$ se C è liscia). Mostrare che, in questo caso, C è una curva del secondo tipo.*

Dimostrazione. **(a)** Usando le proprietà dei morfismi birazionali fra superfici, abbiamo che

$$\begin{tikzcd} & S'' \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & S' \end{tikzcd}$$

ove f e g sono composizione di scoppiamenti. Poiché $\phi(C)$ è un punto anche $g(\widehat{C})$ (ove $\widehat{C}$ è la trasformata stretta di C) è un punto e quindi, poiché $\widehat{C}$ è irriducibile, $\widehat{C}$ è una curva eccezionale di uno scoppiamento. Questo dimostra che C è una curva razionale (la sua normalizzazione è infatti isomorfa a $\mathbb{P}^1$).

Mostriamo ora che l'autointersezione della trasformata stretta di una curva passante per almeno uno dei punti scoppiati è sempre strettamente minore dell'autointersezione della curva stessa. Sia $f = \epsilon_n \circ \cdots \circ \epsilon_0 \colon S'' \to S$ un morfismo birazionale tra superfici, dove ϵ_0 è lo scoppiamento dei punti di S'' scoppiati da f, ϵ_1 è lo scoppiamento dei punti infinitamente vicini di ordine 1 scoppiati da f e, più in generale, ϵ_i è lo scoppiamento dei punti infinitamente vicini di ordine i. Siano inoltre $\eta_i = \epsilon_i \circ \cdots \circ \epsilon_n$. Sia C una curva irriducibile su S e sia $\widehat{C}$ la sua trasformata stretta in S'', allora

$$\widehat{C} = f^*C - \sum_{i \in I_1} \eta_1^* m_{1,i} E_{1,i} - \sum_{i \in I_2} \eta_1^* m_{2,i} E_{2,i} - \cdots - \sum_{i \in I_{n-1}} \eta_{n-1}^* m_{n-1,i} E_{n-1,i},$$

dove $m_{j,i}$ è la molteplicità in C di un punto infinitamente vicino di ordine $j-1$.

Otteniamo quindi che

$$\widehat{C}^2 = (f^*C - \sum_{i \in I_1} \eta_1^* m_{1,i} E_{1,i} - \sum_{i \in I_2} \eta_1^* m_{2,i} E_{2,i} - \cdots - \sum_{i \in I_{n-1}} \eta_{n-1}^* m_{n-1,i} E_{n-1,i})^2 =$$

$$= C^2 - \sum_{i,j} m_{i,j}^2 < C^2,$$

infatti le rette eccezionali di uno stesso ϵ_i sono fra loro disgiunte per costruzione, mentre, per $i < j$, abbiamo che $\eta_i^* E_{i,l} . \eta_j^* E_{j,k} = \eta_j^* \circ (\epsilon_{j-1}^* \circ \cdots \circ \epsilon_i^*) E_{i,l} . \eta_j^* E_{j,k} = \epsilon_{j-1}^* \circ \cdots \circ \epsilon_i^* E_{i,l} . \eta_j^* E_{j,k} = 0$.

Supponiamo che C sia liscia. Per quanto abbiamo visto sopra abbiamo che

$$-1 = \widehat{C}^2 = C^2 - n,$$

con n strettamente positivo poiché è necessario almeno uno scoppiamento affinché ϕ sia definita su tutta C. Abbiamo quindi ottenuto

$$C^2 = n - 1$$

e, grazie alla formula del genere,

$$C.K_S = -1 - n.$$

Nel caso in cui la curva non sia liscia posso prima fare gli scoppiamenti per ottenere la normalizzazione N e poi quelli per poter definire ϕ sulla trasformata stretta di C. Sfruttando il punto c) dell'esercizio precedente e il caso in cui C sia liscia si ottiene

$$C^2 = \sum_i m_i^2 - 1 + n$$

e

$$C.K_S = \sum_i m_i - 1 - n.$$

(b) Sia ora C una curva razionale singolare con $C^2 \geqslant \sum_i m_i^2 - 1$: Come prima, dopo aver fatto gli scoppiamenti necessari per normalizzare, otteniamo $N^2 = C^2 - \sum_i m_i^2 \geqslant -1$. A questo punto dopo aver fatto $N^2 + 1$ scoppiamenti in $N^2 + 1$ punti distinti di N abbiamo che la trasformata stretta $\widehat{C}$ di C è una curva eccezionale del primo tipo, infatti

$$\widehat{C}^2 = (\epsilon^* N + \sum_i E_i)^2$$

con tutti gli E_i disgiunti, e quindi

$$\widehat{C}^2 = N^2 - N^2 - 1 = -1.$$

Per il criterio di Castelnuovo $\widehat{C}$ può essere contratta, mostrando così che la curva C è una curva eccezionale del secondo tipo. In maniera analoga si dimostra che una curva C liscia con autointersezione non negativa è una curva eccezionale del secondo tipo, basta infatti fare $C^2 + 1$ scoppiamenti di $C^2 + 1$ punti distinti di C per avere una trasformata stretta contraibile. □

3 Esercizi capitolo 3

Nel seguito, sia C una curva liscia, E un fibrato vettoriale di rango 2 su C e $S = \mathbb{P}E$.

Esercizio 3.1. *Sia $s \in S$, F la fibra della proiezione $p : S \to C$ per s. Mostrare che nello scoppiamento di S in s possiamo contrarre la trasformata stretta di F. La superficie ottenuta è una superficie geometricamente rigata S'; la mappa razionale $S \dashrightarrow S'$ è chiamata una trasformazione elementare di centro s.*

Dimostrazione. La fibra F ha autointersezione 0, quindi quando scoppiamo in p otteniamo una coppia di curve lisce razionali con autointersezione -1 che si intersecano in un punto, date dal divisore eccezionale D e la trasformata stretta $\widetilde{F}$: infatti si ha che

$$0 = F^2 = (\epsilon^* F)^2 = (\widetilde{F} + D)^2 = \widetilde{F}^2 + 2 - 1 = \widetilde{F} - 1,$$

dove ϵ è lo scoppiamento. Per Castelnuovo possiamo contrarre $\widetilde{F}$; la superficie ottenuta S' è geometricamente rigata, perchè tutte le fibre sono isomorfe a $\mathbb{P}^1$, ed è birazionale a S perchè è isomorfa ad S fuori dalla fibra F. $\square$

Esercizio 3.2. *La superficie S' ottenuta sopra è isomorfa a $\mathbb{P}E'$, dove E è il nucleo del morfismo di fasci*

$$u_s : E \longrightarrow \mathbb{C}_s$$

e $\mathbb{C}_s$ è il fascio grattacielo su s. Inoltre la trasformazione elementare $S' \to S$ corrisponde all'inclusione di fasci $E' \to E$.

Dimostrazione. Definiamo precisamente u_s: essendo un morfismo di fasci, vogliamo che sia una mappa $u_s : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, \mathbb{C}_s)$, dove U è un aperto di C contenente $x = p(s)$ (altrimenti $\mathbb{C}_s$ sarebbe il fascio nullo) e Γ indica le sezioni del fascio. $s \in S = \mathbb{P}E$ corrisponde ad una retta $\lambda_s \subseteq E_x$; sia $\lambda_{s'}$ un'altra retta di E_x corrispondente a $s' \in S$ nella stessa fibra di s. Definiamo la mappa $\pi : E_x \to \lambda_s = \mathbb{C}$ data dalla proiezione sulla retta λ_s, cioè la mappa che manda a zero $\lambda_{s'}$ e lascia invariata λ_s. Allora

$$\begin{array}{rccc} u_s : & \Gamma(U, E) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathbb{C}_s) \\ & \sigma & \longmapsto & \pi(\sigma(x)) \end{array}$$

La scelta di una base di E_x data da λ_s e $\lambda_{s'}$ si estende localmente intorno ad x, cioè esiste un intorno U di x per cui $E|_U \cong \mathcal{O}l_U \oplus \mathcal{O}l_U$. In tale intorno la mappa u_s si scrive

$$\begin{array}{rccc} u_s : & \Gamma(U, \mathcal{O}l_U \oplus \mathcal{O}l_U) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathbb{C}_s) \\ & (\sigma_1, \sigma_2) & \longmapsto & \sigma_1(x) \end{array}$$

e perciò il nucleo E' è localmente isomorfo (intorno a x) al fascio localmente libero di rango 2 $\mathcal{O}l_U(-x) \oplus \mathcal{O}l_U)$. Visto che $\mathbb{C}_s$ è nullo fuori da x, necessariamente E' è localmente libero di rango 2 anche fuori da x, e quindi è un fibrato di rango 2.
Adesso l'inclusione di fasci $E' \to E$ induce una mappa $\phi : \mathbb{P}E' \dashrightarrow \mathbb{P}E = S$. Chiaramente ϕ è l'identità fuori dalla fibra F sopra x contenente s e s'; restringiamoci dunque all'aperto U considerato prima. Se indichiamo con $s = [1, 0]$ la retta λ_s vista in $\mathbb{P}E_x$ e con $s' = [0, 1]$ la retta $\lambda_{s'}$, ϕ non è definita su $[0, 1]$ (perchè manda la retta $\lambda_{s'}$ a zero), e manda tutta la restante parte della fibra su $[1, 0]$ per costruzione. In altre parole, sopra x ϕ ha la forma

$$\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathbb{P}E')_x & \longrightarrow & (\mathbb{P}E)_x \\ & [a, b] & \longmapsto & [a, 0] \end{array}$$

Scoppiando $\mathbb{P}E'$ in $s' = [0, 1]$, la mappa ϕ diventa ben definita ovunque e in particolare assume la forma

$$\begin{array}{rccc} \phi' : & (\mathbb{P}E')^{\wedge}_x & \longrightarrow & (\mathbb{P}E)_x \\ & ([a, b], [v, w]) & \longmapsto & \begin{cases} [1, 0] & \text{se } a \neq 0 \\ [v, w] & \text{se } a = 0 \end{cases} \end{array}$$

Visto che ϕ' contrae la trasformata stretta di F ed è un isomorfismo sul divisore eccezionale, concludiamo che $\mathbb{P}E'$ è proprio S' e ϕ' è la trasformazione elementare $S' \dashrightarrow S$. $\square$

Esercizio 3.3. *Sia $C \neq \mathbb{P}^1$, X una superficie minimale e $\phi : X \dashrightarrow S$ una mappa birazionale. Allora ϕ è composizione di un isomorfismo e alcune trasformazioni elementari.*

Dimostrazione. Consideriamo la risoluzione delle singolarità

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & S \end{tikzcd}$$

con $\epsilon = \epsilon_1 \circ \ldots \circ \epsilon_n$ composizione di scoppiamenti con n minimale. Assumiamo per ora $n \geqslant 1$. Sia D il divisore eccezionale dell'ultimo scoppiamento ϵ_n; per minimalità di n, $\eta(D)$ è una curva in S, e visto che $C \neq \mathbb{P}^1$, necessariamente deve essere una fibra della fibrazione $p : S \to C$. Visto che $D^2 = -1$ e $\eta(D)^2 = 0$, l'unica possibilità è che η scoppi esattamente un punto di $\eta(D)$, sia esso s. Consideriamo la trasformazione elementare t di centro s:

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[drr, bend left, "\eta'"] & & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & S \arrow[r, dashed, "t"'] & S' \end{tikzcd}$$

Per costruzione $\eta' : X_n \to S'$ è un morfismo, perchè η contrae il divisore eccezionale sopra p e poi t riscoppia p. D'altra parte η' contrae D per costruzione, quindi $t \circ \phi$ fattorizza attraverso $\epsilon' : X_{n-1} \to X$. Ripetendo lo stesso ragionamento un numero opportuno di volte, otteniamo che esistono trasformazioni elementari $t_1, \ldots, t_k$ tali che $\phi \circ t_1 \circ \ldots \circ t_k$ è un morfismo birazionale, e per minimalità di X tale composizione è un isomorfismo. □

Esercizio 3.4. *Sia ancora $C \neq \mathbb{P}^1$ e indichiamo con $\mathrm{Aut}_b(S)$ il gruppo degli automorfismi birazionali di S. Esiste una successione esatta*

$$1 \longrightarrow \mathbb{P}\,\mathrm{GL}(2, K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_b(S) \longrightarrow \mathrm{Aut}(C) \longrightarrow 1,$$

dove K è il campo delle funzioni razionali di C; inoltre la scelta di una mappa birazionale da S a $C \times \mathbb{P}^1$ dà uno spezzamento naturale della successione esatta.

Dimostrazione. Sia $u : S \dashrightarrow S$ un automorfismo birazionale di S, e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, "p"'] & S \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "v"'] & C \end{tikzcd}$$

dove v è definito come $p \circ u \circ \sigma$, con $\sigma : C \to S$ una qualunque sezione di p. v è un automorfismo di C perchè è una mappa birazionale fra curve lisce, e il diagramma commuta perchè u porta fibre di p in fibre di p (in quanto C non è razionale). L'omomorfismo $\mathrm{Aut}_b(S) \to \mathrm{Aut}(C)$ appena costruito è surgettivo, perchè ogni automorfismo di C si estende banalmente a un automorfismo di $C \times \mathbb{P}^1$, e S è birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$.
Il nucleo di tale omomorfismo è dato dagli automorfismi birazionali di S che mandano la fibra S_x sopra x in se stessa per quasi ogni $x \in C$; la fibra S_x è un $\mathbb{P}^1$, quindi il nucleo

è dato dagli automorfismi birazionali di S che agiscono come una proiettività su quasi ogni fibra. In altre parole, il nucleo coincide con le proettività della fibra generica, e visto che la fibra generica è un $\mathbb{P}^1$ definito su K, coincide con $\mathbb{P}\,\mathrm{GL}(2, K)$. □

4 Esercizi capitolo 4

Nel seguito, siano $\mathbb{F}_n$ le uniche superfici geometricamente rigate sopra $\mathbb{P}^1$, i.e.

$$\mathbb{F}_n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$$

con $n \leqslant 0$. Denotiamo con h e f rispettivamente le classi in $\mathrm{Pic}(\mathbb{F}_n)$ del fibrato tautologico $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1)$ e della fibra. Sia B l'unica curva di autointersezione negativa e b la sua classe in $\mathrm{Pic}(\mathbb{F}_n)$. Ricordiamo che $b = h - nf$, $h^2 = n$, $f^2 = 0$, $h \cdot f = 1$ e $b^2 = -n$.

Esercizio 4.1. *Mostrare che il sistema lineare completo $|h|$ su $\mathbb{F}_n$ definisce un morfismo $f : \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^{n+1}$ che è embedding fuori da B e contrae B ad un punto p. Mostrare che $f(\mathbb{F}_n)$ è il cono di vertice p sopra una curva proiettiva normale di grado n in $\mathbb{P}^n$.*

Dimostrazione. Procediamo per step:

Step 1: *mostriamo che $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = 2$ e $h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = 0$*
Consideriamo la successione esatta corta di definizione per F:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_F \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F) \to \mathcal{O}_F(F) \to 0$$

In particolare, ricordando che $H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 0$, otteniamo la seguente successione esatta corta delle sezioni globali

$$0 \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) \to H^0(F, \mathcal{O}_F(F)) \to 0.$$

Poichè $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 1$ e $H^0(F, \mathcal{O}_F(F)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F^2)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, otteniamo

$$h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = 2.$$

Infine, sfruttando la dualità di Serre, $H^1(F, \mathcal{O}_F(F)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$, allora

$$h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = 0.$$

.

Step 2: *mostriamo che $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H)) = n+2$, in modo da verificare che il sistema lineare definisce un embedding in $\mathbb{P}^{n+1}$*
Consideriamo la successione esatta corta di definizione per una curva razionale $H \in |h|$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-H) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H) \to \mathcal{O}_H(H) \to 0$$

In particolare, ricordando che $H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 0$, otteniamo la seguente successione esatta corta delle sezioni globali

$$0 \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H)) \to H^0(F, \mathcal{O}_H(H)) \to 0.$$

Poichè $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}) = 1$ e $H^0(H, \mathcal{O}_H(H)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(H^2)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, abbiamo $h^0(H, \mathcal{O}_H(H)) = n+1$ e quindi otteniamo

$$h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = n+2.$$

Step 3: *mostriamo che il sistema lineare $|h|$ contrae B*
Siano $x \neq y \in B$ e $\sigma \in H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H))$. Vogliamo mostrare che $\sigma(x) = \sigma(y)$. Sia $s\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{F}_n$ la sezione di definizione di B, e $x' \neq y' \in \mathbb{P}^1$ tali che $s(x') = x$ e $s(y') = y$. (x' e y' sono diversi perchè $B \cdot F = 1$, quindi x e y appartengono a fibre diverse). Osserviamo che, essendo $s^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, il seguente diagramma commuta ed è cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(h) \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \arrow[l, "\overline{s}"'] \arrow[d] \\
\mathbb{F}_n \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[r, bend left, "p"] & \mathbb{P}^1 \arrow[l, "s"] \arrow[u, bend right, "s^*\sigma"']
\end{tikzcd}$$

In particolare, poichè $s^\sigma \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}1})$ è costante, otteniamo

$$\sigma(x) = \sigma(s(x')) = \overline{s}(s^*\sigma(x')) = \overline{s}(s^*\sigma(y')) = \sigma(s(y')) = \sigma(y).$$

.

Step 4: *mostriamo che il sistema lineare $|h|$ è embedding sulle fibre*
Vogliamo mostrare che

$$H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H)) \twoheadrightarrow H^0(F, \mathcal{O}_F(H))$$

in questo modo, essendo $H^0(F, \mathcal{O}_F(H)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F \cdot H)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, abbiamo che

$$f|_F = \psi_{|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)}$$

che è embedding, quindi separa punti e vettori tangenti. Consideriamo dunque la successione esatta corta di definizione per F:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_F \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H-F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H) \to \mathcal{O}_F(H) \to 0.$$

Basta dunque mostrare che $H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H-F)) = 0$. Per far ciò, considerando la successione esatta corta di definizione per H tensorizzata per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H-F)$ otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H-F) \to \mathcal{O}_H(H-F) \to 0.$$

Poichè grazie allo Step 1 $h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = 0$ e $H^1(H, \mathcal{O}_H(H-F)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(H \cdot H - F)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-1)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1-n)) = 0$, dalla successione lunga in coomologia otteniamo quanto desiderato, cioè

$$H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H-F)) = 0$$

e il sistema lineare $|h|$ è embedding sulle fibre.

Step 5: *mostriamo che il sistema lineare $|h|$ è embedding*
Separazione dei punti: Siano $x \neq y \in \mathbb{F}_n$ non appartenenti a B. Grazie allo Step 4 possiamo supporre che siano su fibre distinte. Vogliamo trovare un divisore $D \in |h|$ tale che $x \in D$ ma $y \notin D$. Sia F_x la fibra di x. Allora $D = B + nF_x \sim h - nf + nf \sim h$ è il divisore (effettivo) nel sistema lineare $|h|$ che cercavamo.
Separazione vettori tangenti: Sia v vettore tangente ad $x \in \mathbb{F}_n$ non appartenente a B. Sia F_x la sua fibra. Se v è vettore tangente della fibra, abbiamo concluso grazie allo Step 4. Altrimenti, sia $D = B + F_x + (n-1)F_y \in |h|$ dove $F_y \neq F_x$.

Step 6: *mostriamo che $f(\mathbb{F}_n)$ è il cono di vertice p sopra una curva proiettiva normale di grado n in $\mathbb{P}^n$.*
Sia $H \in |h|$ curva normale. Allora abbiamo che il suo grado in $\mathbb{P}^{n+1}$ è dato dalla sua autointersezione, cioè $H^2 = n$. Inoltre essendo f embedding, la sua immagine tramite f è ancora curva (proiettiva) normale. Analogamente, osserviamo che l'immagine delle fibre tramite f sono rette, poichè il loro grado è dato da $F \cdot H = 1$. Dato che B interseca ogni fibra in un unico punto, $f(F)$ passa per $f(B) = p$. Dunque $f(\mathbb{F}_n)$ è il cono di vertice p sopra $f(H)$.

□

Esercizio 4.2 (a). *Mostrare che il sistema lineare completo $|h + kf|$ con $k > 0$ su $\mathbb{F}_n$ definisce un embedding $j \colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^{n+2k+1}$. Mostrare che le fibreF$_t$ sono mandate in una famiglia di linee disgiunte e le curve $j(B)$ e $j(H)$ sono proiettivamente normali razionali di grado k e $n+k$ rispettivamente, che incontrano ogni linea $j(F_t)$ una volta. Mostrare che $j(\mathbb{F}_n)$ è di frado $d = n + 2k$ in $\mathbb{P}^{d+1}$.*

Dimostrazione. Procediamo per step:

Step 1: *mostriamo che $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) = k+1$ e $h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) = 0$ per ogni $k \leqslant 0$*

Per induzione su k. Per il caso $k = 0$, guardare lo Step 1 dell'Esercizio 1. Supponiamo $k > 0$ e consideriamo la successione esatta corta di definizione per F:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_F \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}((k-1)F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF) \to \mathcal{O}_F(kF) \to 0$$

In particolare, poichè per ipotesi induttiva $H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}((k-1)F)) = 0$, otteniamo la seguente successione esatta corta delle sezioni globali

$$0 \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(k-1)F) \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) \to H^0(F, \mathcal{O}_F(kF)) \to 0.$$

Poichè $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(k-1)F) = k$ e $H^0(F, \mathcal{O}_F(kF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F^2)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, otteniamo

$$h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) = k + 1.$$

Infine, sfruttando la dualità di Serre, $H^1(F, \mathcal{O}_F(kF)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$, allora

$$h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) = 0.$$

.

Step 2: *mostriamo che* $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H+kF)) = n+2k+2$ *e* $h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H+kF)) = 0$ *, in modo da verificare che il sistema lineare definisce un embedding in* $\mathbb{P}^{n+2k+1}$
Consideriamo la successione esatta corta di definizione per una curva razionale $H \in |h|$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-H) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF) \to \mathcal{O}_H(H + kF) \to 0$$

In particolare, grazie allo Step 1, otteniamo la seguente successione esatta corta delle sezioni globali

$$0 \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) \to H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)) \to H^0(F, \mathcal{O}_H(H + kF)) \to 0.$$

Poichè $h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(kF)) = k+1$ e $H^0(H, \mathcal{O}_H(H + kF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(H^2 + kH \cdot F)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n + k))$, abbiamo $h^0(H, \mathcal{O}_H(H + kF)) = n + k + 1$ e quindi otteniamo

$$h^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(F)) = n + 2k + 2.$$

Infine, sfruttando la dualità di Serre, $H^1(H, \mathcal{O}_H(H + kF)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n + k)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2 - n - k)) = 0$, allora

$$h^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)) = 0.$$

.

Step 3: *mostriamo che il sistema lineare $|h + kf|$ è embedding su B*
Vogliamo mostrare che

$$H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)) \twoheadrightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B(H + kF))$$

in questo modo, essendo $H^0(B, \mathcal{O}_B(H + kF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(H - nF \cdot H + kF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k))$, abbiamo che

$$f\big|_F = \psi_{|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)}$$

che, se $k > 0$, è embedding, quindi separa punti e vettori tangenti. Consideriamo dunque la successione esatta corta di definizione per $B = H - nF$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-B) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_B \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}((n + k)F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF) \to \mathcal{O}_B(H + kF) \to 0.$$

Poichè $H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}((n + k)F)) = 0$ per lo Step 1 otteniamo quanto desiderato, cioè che il sistema lineare $|h + kf|$ è embedding su B.

Step 4: *mostriamo che il sistema lineare $|h + kf|$ è embedding sulle fibre*
Vogliamo mostrare che

$$H^0(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)) \twoheadrightarrow H^0(F, \mathcal{O}_F(H + kF))$$

in questo modo, essendo $H^0(F, \mathcal{O}_F(H+kF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(F\cdot H+kF^2)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, abbiamo che

$$f\big|_F = \psi_{|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)}$$

che è embedding, quindi separa punti e vettori tangenti. Consideriamo dunque la successione esatta corta di definizione per F:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n} \to \mathcal{O}_F \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF)$, otteniamo:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + (k - 1)F) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + kF) \to \mathcal{O}_F(H + kF) \to 0.$$

Poichè $H^1(\mathbb{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(H + (k - 1)F)) = 0$ per lo Step 1 otteniamo quanto desiderato, cioè che il sistema lineare $|h + kf|$ è embedding sulle fibre.

Step 5: *mostriamo che il sistema lineare $|h + kf|$ è embedding*
Separazione dei punti: Siano $x \neq y \in \mathbb{F}_n$. Grazie allo Step 3 possiamo supporre che y non appartenga a B e grazie allo Step 4 possiamo supporre che siano su fibre distinte. Vogliamo trovare un divisore $D \in |h|$ tale che $x \in D$ ma $y \notin D$. Sia F_x la fibra di x. Allora $D = B + (n + k)F_x \sim h - nf + (n + k)f \sim h + kf$ è il divisore (effettivo) nel sistema lineare $|h + kf|$ che cercavamo.
Separazione vettori tangenti: Sia v vettore tangente ad $x \in \mathbb{F}_n$ non appartenente a B.

Sia F_x la sua fibra. Se v è vettore tangente della fibra, abbiamo concluso grazie allo Step 4. Altrimenti, sia $D = B + F_x + (n + k - 1)F_y \in |h|$ dove $F_y \neq F_x$.

Step 6: *mostriamo che le fibreF_t sono mandate in una famiglia di linee disgiunte e le curve $j(B)$ e $j(H)$ sono proiettivamente normali razionali di grado k e $n+k$ rispettivamente, che incontrano ogni linea $j(F_t)$ una volta. Mostrare che $j(\mathbb{F}_n)$ è di grado $d = n + 2k$ in $\mathbb{P}^{d+1}$.*
Sia F una fibra. Allora abbiamo che il suo grado in $\mathbb{P}^{n+1}$ è dato dall'intersezione $F \cdot (H + kF) = 1$, quindi le fibre vengono mappate in rette disgiunte (essendo j embedding). Analogamente essendo B ed H curve (proiettive) normal razionali, lo sono anche $j(B)$ e $j(H)$. Per determinare il grado basta osservare che

$$B \cdot (H + kF) = (H - nF)(H + kF) = n - n + k = k; \qquad H \cdot (H + kF) = n + k.$$

Infine il grado della superficie $j(\mathbb{F}_n)$ è determinato dall'autointersezione $(H + kF)^2 = n + 2k = d$.

□

Esercizio 4.2 (b)**.** *Siano H^k e H^{d-k} due spazi lineari disgiunti in $\mathbb{P}^{d+1}$ di dimensione k e $d-k$ ($2k \leqslant d$). Siano $R_k \subset H^k$ e $R_{d-k} \subset H^{d-k}$ due curve proiettive normali razionali di grado k e $d-k$ rispettivamente. sia $u \colon R_k \xrightarrow{\sim} R_{d-k}$ isomorfismo. Mostrare che*

$$S = \bigcup_{x \in R_k} l_x, \qquad l_x =< x, u(x) >$$

è una copia di $\mathbb{F}_n$ con $n = d - 2k$ immersa in $\mathbb{P}^{d+1}$ tramite il sistema lineare $|h + kf|$.

Dimostrazione. **Step 1:** *Mostriamo che S è una superficie algebrica*
Osserviamo che possiamo scrivere

$$S = \Big\{(x, y, z) \in R_k \times R_{d-k} \times \mathbb{P}^{d+1} | y = u(x) \text{ e } z \in l_x\Big\}$$

che è un sottospazio algebrico di $H^k \times H^{d-k} \times \mathbb{P}^{d+1}$.

Step 2: *Mostriamo che $l_x \cap l_y = \varnothing \;\leftrightarrow x \neq y$*
Se per assurdo $l_x \cap l_y \neq \varnothing$, allora $< l_x, l_y >\cong \mathbb{P}^2$, in particolare presi $x \neq x' \in R_k$, le rette $< x, x' >$ e $< u(x), u(x') >$ devono incontrarsi in un punto. Essendo $< x, x' >\subset H^k$ e $< u(x), u(x') >\subset H^{d-k}$, questo contraddice il fatto che i due sottospazi sono per ipotesi disgiunti.

Step 3: *S è geometricamente rigata sopra $\mathbb{P}^1$, dunque $S \cong \mathbb{F}_n$ per qualche $n \geqslant 0$.*
Vista S come nello Step 1, sia $u \colon S \to R_k$ la proiezione sul primo fattore. Questo è chiaramente un morfismo con ogni fibra isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Dunque, dato che S è irriducibile, è

superficie geometricamente rigata sopra $R_k \cong \mathbb{P}^1$, e grazie al teorema di caratterizzazione, esiste un $n \geqslant 0$ per cui $S \cong \mathbb{F}_n$.

Step 4: *Troviamo $B \subset S$ di autointersezione negativa.*
Osserviamo che se $H \subset \mathbb{P}^{d+1}$ è iperpiano contenente H^k, abbiamo

$$H \cap S = R_k \cup l_{u(x_1)} \cup \cdots \cup l_{u(x_{d-k})}$$

perchè il grado di R^{d-k} è $d-k$. Analogamente se $H' \subset \mathbb{P}^{d+1}$ è iperpiano contenente H^{d-k}, abbiamo

$$H' \cap S = R_{d-k} \cup l_{y_1} \cup \cdots \cup l_{y_k}$$

perchè il grado di R^k è k.
In particolare otteniamo che, presi $H^k \subset H$ e $H^{d-k} \subset H'$ generici,

$$\deg S = \left|S \cap H \cap H'\right| = |\{u(x_1), \ldots, u(x_{d-k}), y_1, \ldots, y_k\}| = d$$

Preso il sistema lineare dei divisori ottenuti dall'intersezione di S con iperpiani contenenti H^k oppure H^{d-k}, otteniamo quindi che, definita $n = d - 2k > 0$,

$$d = (R_k + l_1 + \cdots + l_{d-k})^2 = R_k^2 + 2(d-k) \qquad \rightarrow \qquad R_k^2 = 2k - d = -n$$

$$d = (R_{d-k} + l_1 + \cdots + l_k)^2 = R_{d-k}^2 + 2k \qquad \rightarrow \qquad R_{d-k}^2 = d - 2k = n$$

Quindi, nella notazione dell'Esercizio 4.2, posto $H = R_{d-k}$ e $B = R_k$ otteniamo quanto volevamo mostrare. □

5 Esercizi capitolo 5

Esercizio 5.1. *Sia S una superficie con sistema anticanonico $|-K|$ ampio (ossia un suo multiplo determina una immersione di S in $\mathbb{P}^N$). Mostrare che o $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oppure S è ottenuta da $\mathbb{P}^2$ dopo aver scoppiato r punti distinti ($r \leqslant 8$) in posizione generale*

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo che una tale superficie S sia necessariamente razionale. Poiché un multiplo di $-K$ è ampio, necessariamente si ha che $-K$ interseca positivamente qualunque divisore effettivo in particolare $(-K)^2 = K^2 > 0$. Supponiamo quindi che uno dei plurigeneri non sia nullo e quindi esiste un divisore effettivo D linearmente equivalente a nK con $n > 0$. Per quanto detto sopra si avrebbe che $-K.D = -K.nK = -n(K^2) < 0$ che sarebbe però un assurdo, in quanto l'intersezione di due divisori effettivi di cui con autointersezione positiva è sempre maggiore o uguale a zero. Abbiamo quindi che $P_n(S) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sappiamo che è valida la formula di Noether $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K^2 + \chi_{top}(S))$ ossia, ricordandoci che $2q = b_1$ (b_i è l'i-esimo numero di Betti) e che nel nostro caso $P_g = 0$, $12 - 12q = K^2 + 2 - 4q + b_2$ o, equivalentemente, $K^2 = 10 - 8q - b_2$. Supponiamo per assurdo che q sia strettamente positivo: nel caso in cui $q \geqslant 2$ abbiamo già una contraddizione (ricordiamo che nel nostro caso $K^2 > 0$). Per ottenere che anche il caso $q = 1$ non sia possibile basta mostrare che $b_2 \geqslant 2$. Sappiamo che se $P_g = 0$ e $q = 1$ la mappa di Albanese $\alpha \colon S \to Alb(S)$ ha immagine una curva ellittica le cui fibre sono connesse.

Siano $f, h \in H^2(S, \mathbb{Z})$ rispettivamente la classe di una fibra di α e la classe di una sezione di iperpiano. Poiché $f^2 = 0$ e $f.h > 0$ abbiamo che f e h sono linearmente indipendenti e quindi $b_2 \geqslant 2$ ottenendo l'assurdo desiderato.

In particolare abbiamo mostrato che $P_2(S) = q(S) = 0$ e quindi, per il teorema di Castelnuovo, S è una superficie razionale.

Mostriamo se S domina una superficie $\mathbb{F}_n$ (ossia esiste un morfismo birazionale $S \to \mathbb{F}_n$) allora $n \leqslant 2$. Supponiamo anzitutto che $S = \mathbb{F}_n$, sappiamo allora che $K = -2H + (n-2)F$ ove H è la classe del fascio $\mathcal{O}_S(1)$ e F è la classe della fibra. Sappiamo inoltre che esiste una curva irriducibile B linearmente equivalente a $H - nF$. Abbiamo che

$$-K.B = (2H + (2-n)F).(H - nF) = 2n - 2n + 2 - n = 2 - n.$$

Abbiamo già notato che se $-K$ è ampio allora interseca positivamente tutti i divisori effettivi, in particolare se $\mathbb{F}_n$ ha l'anticanonico ampio si ha che $2 - n > 0$ ossia $n < 2$. Anche se S è una superficie che domina $\mathbb{F}_n$ con $n \geqslant 2$ si ha che la trasformata stretta di B interseca negativamente l'anticanonico di S. Questo lo si dimostra per induzione sul numero di scoppiamenti necessari per ottenere S da $\mathbb{F}_n$. Supponiamo di aver mostrato che dopo n scoppiamenti la trasformata stretta B_n di B in S_n interseca negativamente l'anticanonico $-K_n$ e mostriamo che scoppiando un'altra volta si ottiene ancora lo stesso risultato. Abbiamo che $B_{n+1} = \epsilon^* B_n - mE$ e $-K_{n+1} = -\epsilon^* K_n - E$ e quindi $B_{n+1}.(-K_{n+1}) = (\epsilon^* B_n - mE).(-\epsilon^* K_n - E) = -B_n.K_n - m < -B_n.K_n < 0$ per induzione. In particolare abbiamo dimostrato che se $-K$ è ampio allora S è una superficie razionale che domina $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oppure $\mathbb{P}^2$. Ricordiamoci inoltre che lo scoppiamento di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in un punto è isomorfo allo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in due punti distinti, quindi è equivalente dire che se $-K$ è ampio in S allora S è $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oppure è una superficie che domina $\mathbb{P}^2$.

Troviamo ora alcune restrizioni su S. Sappiamo che, su $\mathbb{P}^2$, $-K = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ e quindi $K^2 = 9$. Sappiamo inoltre che se $\epsilon \colon S \to S'$ è uno scoppiamento, allora $-K_S = -\epsilon^* K_{S'} - E$ e quindi $K_S^2 = K_{S'}^2 - 1$. Quindi, poiché avere autointersezione positiva è condizione necessaria per essere ampio (in quanto, a meno di costante, questo valore mi da il grado della superficie immersa), abbiamo che se S ha $-K$ ampio, necessariamente è lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in al più 8 punti: se scoppiassi 9 o più volte otterrei $K^2 \leqslant 0$ che non è possibile.

Se scoppiassi $\mathbb{P}^2$ in un punto infinitamente vicino otterrei ancora una superficie con anticanonico non ampio. Sia E la curva eccezionale ottenuta dal primo scoppiamento ϵ e sia E' la curva eccezionale ottenuta scoppiando un punto $p \in E$ tramite ϵ.

$$S \xrightarrow{\epsilon} S' \xrightarrow{\epsilon'} \mathbb{P}^2.$$

Vogliamo mostrare che l'intersezione fra l'anticanonico di S e la trasformata stretta di E è nullo, implicando che l'anticanonico non sia ampio. La trasformata stretta $\widehat{E}$ di E è $\epsilon^* E - E'$ mentre l'anticanonico è dato da $3(\epsilon' \circ \epsilon)^* l - \epsilon^* E - E'$, per cui:

$$-K_S.\widehat{E} = (3(\epsilon' \circ \epsilon)^* l - \epsilon^* E - E').(\epsilon^* E - E') = 1 - 1 = 0.$$

Anche nel caso in cui si scoppiano tre punti non allineati in $\mathbb{P}^2$ si ottiene una superficie con anticanonico non ampio. Siano p_1, p_2, p_3 i tre punti, E_1, E_2, E_3 le rispettive rette eccezionali, sia l la retta passante per i p_i e $\widehat{l}$ la sua trasformata stretta. Allora abbiamo che

$$\widehat{l}.(-K_S) = (\epsilon^* l - E_1 - E_2 - E_3).(3\epsilon^* l - E_1 - E_2 - E_3) = 3 - 3 = 0.$$

Similmente, se scoppio 6 punti contenuti in una conica. Sia D una conica in $\mathbb{P}^2$ e l una retta qualunque: l'anticanonico è linearmente equivalente a $D + l$. Scoppio $\mathbb{P}^2$ in sei punti contenuti in D ma non in l, sia $\epsilon\colon S \to \mathbb{P}^2$ la mappa così ottenuta e sia $\widehat{D}$ la sua trasformata stretta. Abbiamo che

$$\widehat{D}.(-K_S) = (\epsilon^* D - E_1 \cdots - E_6).(\epsilon^* D + \epsilon^* l - E_1 \cdots - E_6) = 4 + 2 - 6 = 0.$$

Infine anche nel caso in cui si scoppiano otto punti contenuti in una cubica di cui uno con molteplicità due. Sia D una conica con un punto p_1 di molteplicità due e siano $p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ altri sette punti qualunque, sia S la superficie ottenuta scoppiando questi otto punti e siano $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8$ le rette eccezionali. Allora abbiamo che

$$\widehat{D}.(-K_S) = (\epsilon^* D - 2E_1 - \cdots - E_8).(\epsilon^* D - E_1 - \cdots - E_8) = 9 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 0.$$

Manca ora da mostrare che in tutti gli altri casi la superficie S ottenuta abbia anticanonico ampio. Nela caso in $S = \mathbb{P}^2$ questo è ovvio in quanto $-K_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ è ampio e, similmente, anche se $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ si ha che $-K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 2)$ che è ampio. Per un ragionamento fatto in precedenza (se l'anticanonico interseca negativamente una curva in S, allora la trasformata stretta della curva interseca negativamente l'anticanonico nello scoppiamento di S in punto qualunque) basta mostrare che scoppiando otto punti al di fuori dei casi precedenti (ossia senza punti infinitamente vicini, tre di essi non contenuti in una retta, sei di essi non contenuti in un conica, non tutti contenuti in una cubica di cui uno con molteplicità due) si ottiene una superficie con anticanonico ampio. Per far ciò sfruttiamo il criterio di Nakai-Moishezon che afferma che un divisore in una superficie è ampio se e solo se ha autointersezione positiva e interseca positivamente tutte le curve. Per conti già fatti abbiamo che $(-K_S)^2 = 1 > 0$ e ovviamente per ogni curva C che non passa per i punti scoppiati si ha che $-K_S.\widehat{C} = -K_{\mathbb{P}^2}.C > 0$. Inoltre, per le proprietà degli scoppiamenti, nei casi in cui siamo, tutte le rette eccezionali intersecano l'anticanonico una volta. Sia l una retta passante per al più due dei punti scoppiati, otteniamo che

$$\widehat{l}. - K_S = (\epsilon^* l - E_1 - \delta E_2).(3\epsilon^* l - E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 - E_7 - E_8) = 3 - 1 - \delta > 0$$

dove $\delta \in \{0, 1\}$. In maniera analoga si mostra che la trasformata stretta di una conica che passa per al più cinque dei punti scoppiati, di una cubica che passa per tutti gli otto punti con molteplicità uno o passante per sei punti con molteplicità uno e uno con mokteplicità due o di una curva di grado maggiore di tre che passa per alcuni di quei punti ha intersezione positiva con l'anticanonico concludendo così la dimostrazione.

□

Esercizio 5.2. *Sia S una superficie in $\mathbb{P}^n$, H una sezione di iperpiano. Assumiamo che $H \equiv -K$. Mostra che S è una superficie di Del Pezzo S_d ($3 \leqslant d \leqslant 9$) o la superficie S_8', l'immagine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ immersa in $\mathbb{P}^8$ tramite il sistema $|2h_1 + 2h_2|$.*

Dimostrazione. Sappiamo già che nelle superfici di Del Pezzo l'anticanonico mi dà un'immersione (Proposizione IV.9) e senza troppe difficoltà si vede che l'anticanonico in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (che è della forma $2h_1 + 2h_2$) mi dà un'immersione di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^8$. inoltre se l'anticanonico è molto ampio in particolare è ampio e quindi S potrebbe essere P_7, o P_8 (dove si intende con P_i la superficie ottenuta scoppiando i punti generici in $\mathbb{P}^2$). Tutto quello che ci rimane da mostrare è che in P_7 e in P_8 l'anticanonico non è molto ampio.

Ricordiamoci che $|-K_{P_7}|$ è rappresentato dalle cubiche passanti per i 7 punti che sono stati scoppiati. Sappiamo che l'insieme delle cubiche sul piano ha dimensione proiettiva 9 e quindi, imponendo il passaggio per 7 punti generici, otteniamo che $|-K_{P_7}|$ ha dimensione 2. Questo ci permette di concludere che l'anticanonico non definisce un'immersione in quanto P_7 non è isomorfa a $\mathbb{P}^2$. Con un ragionamento analogo otteniamo che $|-K_{P_8}|$ ha dimensione 1 e quindi, a maggior ragione, non definisce un'immersione. □

Esercizio 5.3. *Mostrare che una superficie S contenente infinite rette eccezionali è razionale e mostrare che esiste una tale superficie.*

Dimostrazione. Sia S una superficie contenente infinite rette eccezionali e mostriamo che è razionale. Supponiamo che esista un divisore effettivo D linearmente equivalente a nK per un certo $n \in \mathbb{N}$. Sappiamo che, per le proprietà delle rette eccezionali, per ogni retta eccezionale E, $D.E = nK.E = -n$ e questo è possibile solo se E è una componente di D. Ciò vale per ognuna delle infinite rette eccezionali di S implicando che D abbia un numero infinito di componenti, cosa ovviamente non possibile.

Supponiamo per assurdo che q sia strettamente positivo: sappiamo che in questo caso l'immagine della mappa di Albanese $\alpha\colon S \to Alb(S)$ è una curva liscia di genere q e le fibre di α sono connesse. In particolare una qualunque retta eccezionale è contenuta in una fibra della mappa di Albanese. Abbiamo quindi trovato un numero infinito di elementi linearmente indipendenti all'interno del gruppo di Néron-Severi (le infinite rette eccezionali hanno autointersezione -1 e non hanno intersezioni fra di loro), il che è assurdo in quanto questo gruppo e finitamente generato e quindi $q = 0$. Per il Teorema di Castelnuovo concludiamo dicenso che S è razionale.

Vogliamo ora trovare una superficie che abbia infinite curve eccezionali. Per prima cosa mostriamo che esiste un sistema lineare di cubiche tutte irriducibili di dimensione 1. L'insieme delle cubiche in $\mathbb{P}^2$ ha dimensione proiettiva 9. L'insieme delle cubiche riducibili A è formato dalle coppie (F, G) con F una conica (anche riducibile) e G una retta (che ha quindi dimensione $5 + 2 = 7$). In particolare A ha dimensione proiettiva 7 dentro $\mathbb{P}^9$: riesco quindi a trovare una retta dentro $\mathbb{P}^9$ che non interseca A, ossia un sistema lineare P di dimensione 1 di cubiche tutte irriducibili.

Il sistema lineare P ha esattamente 9 punti base distinti, li scoppiamo e otteniamo una superficie S: mostriamo ora che questa superficie ha infinite retta eccezionali. Per prima cosa mostreremo che per ogni divisore D per cui $D^2 = K_S.D = -1$ esiste una curva eccezionale in $|D|$ e poi mostreremo che esistono infiniti elementi di questo genere in $Pic(S)$.

Sia quindi D tale che $D^2 = K_S.D = -1$: poiché S è razionale abbiamo che

$$h^0(D) - h^1(D) + h^2(D) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 - D.K) = 1. \tag{3}$$

Notiamo che, per come è fatto il divisore canonico su S, le trasformate strette dei divisiori in $|P|$ sono contenute in $|-K_S|$ che è quindi non vuoto. Quindi il sistema lineare P ci da un morfismo $\phi\colon S \to \mathbb{P}^1$ le cui fibre sono gli elementi di P e quindi curve ellittiche. Sappiamo che $K_S^2 = (-3\epsilon^* l + E_1 + \cdots + E_9)^2 = 9 - 9 = 0$ (ove E_i sono le rette eccezionali e l è la classe di una retta in $\mathbb{P}^2$), in particolare questo mi permette di dire che $h^2(D) = h^0(K_S - D) = 0$ in quanto $(K_S - D).(-K_S) = -1 < 0$. Grazie all'equazione 3, otteniamo che $h^0(D) > 0$.

Sia ora C una curva irriducibile per cui valga $-K_S.C = 0$: allora, necessariamente, si ha che ϕ contragga C ad un punto, ossia le uniche curve irriducibili che non intersecano $-K_S$ sono le fibre di ϕ (ricordiamo che gli elementi di P sono tutti irriducibili). In particolare, preso un qualunque $D' \in |D|$, abbiamo che $D'.(-K_S) = 1$ e quindi, per quanto appena detto, possiamo scrivere $D = C + C'$ dove C' è una somma di fibre di ϕ (quindi $C'.(-K_S) = 0$) e C è una curva irriducibile che rappresenta una sezione di ϕ (se infatti ci fossero altri componenti irriducibile che non fossero fibre avremmo che $D'.(-K_S) > 1$). In particolare abbiamo che, posto $C' = \sum n_i F_i$ con n_i non negativi e F_i delle fibre, $-1 = (D')^2 = (C + C')^2 = C^2 + 2(\sum n_i) \geqslant C^2$. Per la formula del genere applicata a C, abbiamo che $C^2 = -1$ e quindi $n_i = 0$, e quindi $D' = C$ è una curva eccezionale.

Manca quindi da mostrare che esistono un numero infinito di tali D. Di sicuro ne esiste almeno uno: esempi immediati sono $\epsilon^* l - E_i - E_j$, $2\epsilon^* l - E_i - E_j - E_k - E_l - E_h$. Definiamo $\delta_{ijk} = \epsilon^* L - E_i - E_j - E_k$ (notiamo che $\delta_{ijk}^2 = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$ e $\delta_{ijk}.K_S = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$) e sia $D = \alpha\epsilon^* l - \beta_1 E_1 - \cdots - \beta_9 E_9$ un divisore per cui $D^2 = K_S.D = -1$ con $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_9 > 0$. In particolare questo mi implica che

$$\alpha^2 - \beta_1^2 - \cdots - \beta_9^2 = -1 \tag{4}$$

e

$$-3\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_n = -1. \tag{5}$$

In particolare abbiamo che esistono i, j, k per cui $\beta_i + \beta_j + \beta_k < \alpha$. Considero ora

$$D' = D + (\delta_{ijk}.D)\delta_{ijk} :$$

abbiamo che

$$(D')^2 = D^2 + 2(\delta_{ijk}.D)^2 - 2(\delta_{ijk}.D)^2 = D^2 = -1$$

e

$$D'.K_S = D.K_S + (\delta_{ijk}.D)(\delta_{ijk}.K_S) = D.K_S = -1.$$

Inoltre abbiamo che $\delta_{ijk}.D = \alpha - \beta_i - \beta_j - \beta_k > 0$ e quindi, se scriviamo $D' = \alpha'\epsilon^* l - \beta_1' E_1 - \cdots - \beta_9' E_9$ abbiamo che $\alpha' = \alpha + \alpha - \beta_i - \beta_j - \beta_k > \alpha$ e $\beta_h' = \beta_h$ per $h \neq i, j, k$ e $\beta_h' = \beta_h + \alpha - \beta_i - \beta_j - \beta_k > \beta_h$ se $h = i, j, k$. In particolare abbiamo trovato un numero infinito di divisori D non linearmente equivalenti fra di loro, per cui valga $D^2 = D.K_S = -1$ concludendo così l'esercizio. □

6

7 Esercizi capitolo 7

Esercizio 7.1. *Sia X varietà liscia proiettiva. Considera l'anello canonico*

$$R(X, K_X) = \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_x)).$$

Sia $Q(X, K_X)$ il suo campo di frazioni e d il suo grado di trascendenza su $\mathbb{C}$. Mostrare che

$$k(X) = d - 1.$$

Esercizio 7.2. *Se X, Y sono varietà lisce, allora $k(X \times Y) = k(X) + k(Y)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per quanto visto nel *Fatto III.22*, abbiamo che nelle hp dell'esercizio, dette $p \colon X \times Y \to X$ e $q \colon X \times Y \to Y$ le proiezioni, allora per ogni F, G fibrati vettoriali su X e Y rispettivamente,

$$H^0(X, F) \otimes H^0(Y, G) \cong H^0(X \times Y, F \boxtimes G)$$

dove $F \boxtimes G = p^*F \otimes q^*G$ per definizione. Presi $F = \mathcal{O}_X(nK_X)$ e $G = \mathcal{O}_Y(nK_y)$, abbiamo che

$$H^0(X, nK_X) \otimes H^0(Y, nK_Y) \cong H^0(X \times Y, \mathcal{O}_X(nK_X) \boxtimes \mathcal{O}_Y(nK_Y)).$$

Ma $\mathcal{O}_X(nK_X) \boxtimes \mathcal{O}_Y(nK_Y) = \mathcal{O}_{X \times Y}(nK_{X \times Y})$ dunque

$$H^0(X, nK_X) \otimes H^0(Y, nK_Y) \cong H^0(X \times Y, nK_{X \times Y}).$$

e quindi $P_n(X \times Y) = P_n(X)P_n(Y)$. In particolare se una tra X e Y ha dimensione di Kodaira $-\infty$, allora tutti i plurigeneri di X (o di Y) sono nulli. Ma allora anche tutti i plurigeneri di $X \times Y$ devono essere nulli e quindi la dimensione di Kodaira di $X \times Y$ è $-\infty$. Possiamo quindi assumere che sia X che Y abbiano dimensione di Kodaira non negativa e considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\psi_{nK_{X \times Y}}"] \arrow[dr, "\psi_{nK_X} \times \psi_{nK_Y}"'] & \mathbb{P}\left(H^0(X \times Y, nK_{X \times Y})\right) \\
& \mathbb{P}\left(H^0(X, nK_X)\right) \times \mathbb{P}\left(H^0(Y, nK_Y)\right) \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

dove s è l'immersione di Segre. Dunque

$$dim\ \psi_{nK_{X \times Y}}(X \times Y) = dim\ \psi_{nK_X}(X) + dim\ \psi_{nK_Y}(Y)$$

da cui $k(X \times Y) = k(X) + k(Y)$. □

Esercizio 7.3. *Se $f \colon X \to Y$ è un morfismo suriettivo tra varietà lisce, allora $k(X) \geqslant k(Y)$. Inoltre se f è étale, vale $k(X) = k(Y)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $K_X = f^*K_Y + R$ dove R è un divisore effettivo di X, nullo nel caso in cui f sia étale. Consideriamo il seguente morfismo iniettivo:

$$f^* \colon H^0(Y, K_Y) \hookrightarrow H^0(X, f^*K_Y) = H^0(X, K_X - R).$$

Dalla seguente successione esatta di definizione per R,

$$0 \to \mathcal{O}_X(-R) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_R \to 0$$

tensorizzando per $\mathcal{O}_X(K_X)$, otteniamo

$$0 \to \mathcal{O}_X(K_X - R) \to \mathcal{O}_X(K_X) \to \mathcal{O}_R(K_X) \to 0$$

da cui $H^0(X, K_X - R) \hookrightarrow H^0(X, K_X)$ è un'immersione, quindi

$$H^0(Y, K_Y) \hookrightarrow H^0(X, K_X - R) \hookrightarrow H^0(X, K_X).$$

Analogamente, per ogni $n \geqslant 0$

$$H^0(Y, nK_Y) \hookrightarrow H^0(X, nK_X),$$

da cui si ottiene la seguente estensione di anelli graduati

$$R(Y, K_Y) \hookrightarrow R(X, K_X).$$

Se $k(Y) = -\infty$, non c'è nulla da dimostrare, ed è chiaro che se $k(X) = -\infty$ allora anche $k(Y) = -\infty$. Supponiamo quindi $K(Y) \geqslant 0$. Utilizzando il risultato dell'Esercizio 6.1 abbiamo

$$k(Y) = degtr_{\mathbb{C}}(Q(Y, K_Y)) - 1 \leqslant degtr_{\mathbb{C}}(Q(X, K_X)) - 1 = k(X).$$

Nel caso in cui f sia étale, abbiamo dal *Lemma VI.11* che per ogni $p > 0$ e per ogni $n > 0$ c'è il seguente isomorfismo

$$H^0(Y, (\Omega_Y^p)^{\otimes n}) \xrightarrow{\cong} H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes n})^G$$

dove $G = Gal(f) = \{\phi \in Aut(X) | f\phi = f\}$ è il gruppo di Galois (finito) associato al morfismo étale. Per $p = 2$ otteniamo

$$H^0(Y, nK_Y) \xrightarrow{\cong} H^0(X, nK_X)^G$$

che induce un isomorfismo di anelli graduati

$$R(Y, K_Y) \cong R(X, K_X)^G$$

dove l'azione di G è considerata grado per grado. L'immersione vista in precedenza diventa quindi, poichè $R = 0$,

$$R(Y, K_Y) \cong R(X, K_X)^G \hookrightarrow R(X, K_X).$$

Mostriamo che questa è un'estensione integrale. Se cosi fosse infatti abbiamo che l'estensione tra i campi delle frazioni associate è algebrica, quindi il grado di trascendenza è lo stesso, da cui X e Y hanno stessa dimensione di Kodaira. Una buona referenza su questo passaggio è il Capitolo 5 del libro di Atiyah e MacDonald : *Introduction to Commutative Algebra*

Più in generale facciamo vedere che se G è un gruppo finito di automorfismi di un anello R e R^G è il sottoanello degli elementi G-invarianti (cioè $x \in R$ tali che $g \cdot x = x$ per ogni $g \in G$), allora ogni elemento $r \in R$ è integrale su R^G (cioè esiste un polinomio $P(t) \in R^G[t]$ monico tale che $P(r) = 0$). Fissato $r \in R$, sia

$$P(t) = \prod_{g \in G} (t - g \cdot r).$$

Poichè il gruppo è finito, $P(t)$ è un polinomio. Inoltre i coefficienti di t^k sono (a meno del segno) i polinomi simmetrici elementari nelle variabili $\{g \cdot r\}_{g \in G}$, che sono elementi G-invarianti. Dunque $P(t) \in R^G[t]$ e chiaramente, dato che $1 \in G$, $P(r) = 0$. In particolare

$$R^G \hookrightarrow R$$

è estensione integrale per ogni G gruppo finito. Da cui la tesi.

$\square$

8 Esercizi capitolo 8

Esempio 8.1. Sia P un sistema di quadriche in $\mathbb{P}^3$ di dimensione proiettiva 3, per cui valgano le seguenti condizioni

H1 $\bigcap_{Q \in P} = \emptyset$;

H2 se l è una linea di $\mathbb{P}^3$ che è il vertice di una quadrica degenere $Q \in P$, allora nessun'altra quadrica di P contiene l.

Queste condizioni sono sempre soddisfatte per un sistema lineare generico. Infatti quattro quadriche linearmente indipendenti generiche hanno sempre intersezione nulla, inoltre l'insieme delle quadriche in $\mathbb{P}^3$ ha dimensione proiettiva 9, l'insieme delle quadriche passanti per una retta ha dimensione proiettiva 6 e quindi la retta generica è contenuta in una sola quadrica.

Denotiamo con S l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3$ contenute in un pencil di P, dimostreremo che S (con una opportuna struttura di varietà) è una superficie di Enriques. Per fare ciò costruiremo una superficie K3 X in cui esista una involuzione i senza punti fissi in modo tale che i punti del quoziente siano in corrispondenza biunivoca con i punti di S. Dalla teoria sappiamo che il quoziente di X tramite i è una superficie di Enriques.

Siano ϕ_i per $i = 1, 2, 3, 4$ una base proiettiva del nostro pencil: queste sono delle forme quadratiche nelle coordinate z_0, z_1, z_2, z_3 di $\mathbb{P}^3$. Esistono quindi delle matrici 4×4 simmetriche Φ_i per cui $\phi_i(z) = z\Phi_i z$. Possiamo quindi considerare dentro $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ (in cui il primo $\mathbb{P}^3$ ha coordinate $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ mentre il secondo ha coordinate (y_0, y_1, y_2, y_3)) la sottovarietà definita dalle equazioni $X = \{(x, y) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \mid x\Phi_i y = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4\}$. Questa è una varietà definita da quattro equazioni di bigrado $(1, 1)$. Ovviamente, per come è stata definita, abbiamo che $(x, y) \in X \Leftrightarrow (y, x) \in X$ e quindi la ovvia involuzione i di $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ (ovvero quella che manda (x, y) in (y, x)) discende su X (che continueremo a chiamare i). Notiamo inoltre che nessun punto fisso di i appartiene ad X: i punti fissi di i sono della forma (x, x) e questi non possono appartenere ad X perché, se così fosse, avremmo $x\Phi_i x = \phi_i(x) = 0$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e quindi x starebbe nell'intersezione di tutte le quadriche di P contraddicendo la proprietà $H1$.

Mostriamo ora che esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti di S e le coppie di punti $x, y \in \mathbb{P}^3$ per cui $(x, y), (y, x) \in X$. Sia $(x, y) \in X$, vogliamo mostrare che la retta $< x, y > \in S$ ossia $< x, y >$ è contenuta in un pencil di P. A meno di applicare proiettività, possiamo supporre $x = [1 : 0 : 0 : 0]$ e $y = [0 : 1 : 0 : 0]$ in modo che la retta $< x, y >$ sia data dall'equazione $z_2 = z_3 = 0$. Sappiamo che $x\Phi_i y = y\Phi_i x = 0$ da cui otteniamo che le matrici abbiamo la seguente forma

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_i & 0 & \\ 0 & \beta_i & * \\ \hline & * & * \end{array}\right)$$

. Osserviamo che le 4 forme quadratiche linearmente indipendenti su $\mathbb{P}^3$ (ossia le ϕ_i) se ristrette alla retta di equazione $z_2 = z_3 = 0$ generano uno spazio vettoriale di dimensione

2, ossia il nucleo di questo morfismo di restrizione ha dimensione almeno 2. Abbiamo appena dimostrato che la retta $< x, y >$ è contenuta in un pencil di P. Viceversa, supponiamo ora di aver una retta l contenuta in un pencil di P (ossia $l \in S$) e dimostriamo che esistano esattamente due punti x e y di l per cui $(x, y), (y, x) \in X$. A meno di proiettività possiamo scegliere l in modo che abbia coordinate $z_2 = z_3 = 0$ e, a meno di cambiare la base di P, che ϕ_1 e ϕ_2 si annullino su l (ossia la corrispondente matrice è nulla nel primo quadrante $2x2$). Questo mi dice che presi due punti qualunque x e y su l e visti come punti dello spazio affine quattro dimensionale per cui le ultime due coordinate sono nulle (ricordiamo che $l = \{z_2 = z_3 = 0\}$) abbiamo che, per $i = 1, 2$,

$$0 = (x - y)\Phi_i(x - y) = \phi_i(x) + \phi_i(y) - 2x\Phi_i y = x\Phi_i y.$$

Quindi dati due punti x e y su l abbiamo che $(x, y) \in X$ se e solo se $x\Phi_i y = 0$ per $i = 2, 3$. Queste sono (vedendo x e y come punti in $\mathbb{P}^1$) due equazioni biomogenee di bigrado $(1, 1)$ e quindi stiamo semplicemente calcolando il numero di intersezione $(1, 1).(1, 1) = 2$ ossia il nostro sistema ha esattamente due soluzioni (x, y) e (y, x) che (a questo punti visti come punti di $\mathbb{P}^3$ imponendo le ultime due coordinate uguali a 0) apparterranno a X.

Mostriamo ora che X è una superficie liscia e intersezione completa. Per il criterio Jacobiano, sappiamo che ciò è vero se e solo se la matrice Jacobiana delle equazioni che definiscono X ha rango massimo in ogni punto di X. Quello che mostreremo è che X è liscia e due dimensionale nel punto (x, y) se e solo se la retta $< x, y >$ non è contenuta in un vertice di una quadrica di P: a questo punto entra in gioco la condizione $H2$ che ci assicura che questo non sia possibile. Supponiamo ora che la retta $l =< x, y >$ sia contenuta in un vertice di una quadrica Q di P. A meno di proiettività possiamo supporre $x = [1 : 0 : 0 : 0]$, $y = [0 : 1 : 0 : 0]$, $l = \{z_2 = z_3 = 0\}$ e $Q = \{z_2 z_3 = 0\}$. La corrispondente equazione che ci permette di definire X è quindi data da $\alpha x_2 y_2 + \beta x_2 y_3 + \beta x_3 y_2 + \gamma x_3 y_3 = 0$, quindi la prima riga della Jacobiana è data da $(0, 0, \alpha y_2 + \beta y_3, \beta y_2 + \gamma y_3, 0, 0, \alpha x_2 + \beta x_3, \beta x_2 + \gamma x_3)$ che ovviamente si annulla nel punto (x, y). Viceversa, supponiamo ora che la Jacobiana non abbia rango massimo nel punto $(x, y) = ([1 : 0 : 0 : 0], [0 : 1 : 0 : 0])$. Poiché prendere il gradiente è una applicazione lineare nello spazio dei polinomi di bigrado $(1, 1)$ possiamo supporre che il polinomio $(x_0, x_1, x_2, x_3)\Phi_1(y_0, y_1, y_2, y_3)$ abbia gradiente nullo in (x, y), questo mi implica che la matrice Φ_1 abbia prima riga e seconda colonna nulla. Per simmetria della matrice abbiamo che Φ_1 si nulla al di fuori dell'ultimo quadrante $2x2$. Ossia la forma quadratica associata è del tipo $\alpha z_2^2 + \beta z_2 z_3 + \gamma z_3^2$ che, per completezza dei numeri complessi si spezza come prodotto di due componenti lineari che si intersecano in $l = \{z_2 = z_3 = 0\}$ concludendo così la dimostrazione che X è liscia e intersezione completa.

Sappiamo quindi che S è un quoziente tramite un'involuzione senza punti fissi di una superficie liscia X: se dimostriamo che X è una superficie K3 abbiamo che automaticamente S è una superficie di Enriques. Per dimostra che X è una K3 basta mostrare che il canonico sia banale e che $q(X) = 0$. La formula delle intersezioni complete in prodotti di proiettivi ci assicura che $K_X = \big((1, 1) + (1, 1) + (1, 1) + (1, 1) - K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}\big)\big|_X$ che viene 0. Un argomento simile al caso delle intersezioni complete in $\mathbb{P}^n$ dimostra che $h^1(X) = 0$ completando la dimostrazione.

Esempio 8.2. Costruiamo un altro esempio di superficie di Enriques. Consideriamo dentro $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ una curva liscia B di bigrado $(4, 4)$ (questa esiste poiché il sistema lineare delle curve di bigrado $(4,4)$ è senza punti base e quindi vale il teorema di Bertini). Poiché questa è divisibile per due nel gruppo di Picard esiste un line bundle L per cui $2L = B$ ottenendo un rivestimento doppio $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ramificato su B con X superficie liscia. Per le formule sui rivestimenti ciclici abbiamo che

$$K_X = \pi^*(K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} + L) = \pi^*((2,2) - (2,2)) = 0.$$

Inoltre abbiamo che

$$q(X) = h^1(\mathcal{O}_X) = h^1(\pi_*(\mathcal{O}_X)) = h^1(O_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) + h^1(L^{-1}) = 2h^1(O_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = 0.$$

In particolare X è una superficie K3: come prima, se troviamo una involuzione senza punti fissi, otteniamo una superficie di Enriques passando al quoziente. Per prima cosa consideriamo l'involuzione

$$i\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

data da

$$([x_0 : x_1], [y_0 : y : 1]) \mapsto ([x_0 : -x_1], [y_0, -y_1])$$

e notiamo che ha esattamente 4 punti fissi di coordinate $([0 : 1], [0 : 1]), ([0 : 1], [1 : 0]), ([1 : 0], [0 : 1]), ([1 : 0], [1 : 0])$. Osserviamo inoltre che, a meno di cambiare B, possiamo supporre che nessuno di questi punti appartenga alla ramificazione.

Osserviamo come questa dia in maniera naturale una involuzione su X (che, con abuso di notazione continueremo a chiamare i). Infatti, per come sono costruiti i rivestimenti sappiamo che X è immersa nello spazio totale F del fascio $K^*_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$. Per definizione di fascio canonico abbiamo che F è il prodotto wedge dello spazio tangente di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con se stesso e per cui abbiamo una naturale estensione di i su F data da $di \wedge di$ che possiamo ovviamente restringere a X. Calcoliamo come è fatta i su X mettendoci, per esempio (gli altri casi sono del tutto analoghi) nella carta $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$. su questa carta la mappa è della forma

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

e quindi la mappa indotta su F nella banalizzazione data da questa carta e

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Id.$$

In particolare l'involuzione i X fissa punto a punto le fibre sopra i punti fissi di i in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, mentre negli altri casi cambia la fibra lasciando invariato il "foglio del rivestimento". Per ottenere un'involuzione senza punti fissi basta comporre con l'involuzione j del rivestimento $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Infatti sappiamo che ogni rivestimento doppio è un rivestimento di Galois e quindi una tale j esiste e questa j mi premette di scambiare i fogli del rivestimento. In particolare se considero l'involuzione $j \circ i$ questa è senza punti fissi e mi permette di trovare la superficie di Enriques cercata.

Esercizio 8.1. *Mostrare che per ogni $g \geqslant 2$ esiste una superficie K3 e una curva $C \subset S$ di genere g per cui il morfismo dato da $|C|$ sia un rivestimento doppio di una superficie razionale dentro $\mathbb{P}^g$.*

Dimostrazione. Dalla teoria sappiamo che, data una curva $C \subset S$ di genere g, abbiamo un morfismo in $\mathbb{P}^g$ che è un rivestimento doppio sull'immagine se e solo se l'elemento generico di C è una curva iperellittica e la mappa ristretta a tali curve è la mappa canonica. Quindi per concludere l'esercizio, ci basta trovare una curva liscia iperellittica di genere g.

Studiamo prima il caso $g = 2k + 1$. Dentro $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ consideriamo una curva liscia B di bigrado $(4, 4)$ e, come fatto prima, consideriamo il rivestimento doppio associato $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Svolgendo gli stessi calcoli dell'esempio precedente, otteniamo che X è una superficie K3. Ricordiamo che il gruppo di Picard di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è liberamente generato da due elementi h_1 e h_2 che soddisfano $h_1^2 = h_2^2 = 0$ e $h_1.h_2 = 1$ e che rappresentano le rigature della superficie. Sia C una curva generica dentro il sistema lineare $|h_1 + kh_2|$ $(k \geqslant 1)$ in modo tale che intersechi trasversalmente B. Per il teorema di Bertini C è liscia e, ricordandoci che il canonico in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è della forma $-(2h_1 + 2h_2)$, otteniamo

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + K.C) = 1 + \frac{1}{2}(2k - 2k - 2) = 0.$$

Inoltre vale

$$B.C = (4h_1 + 4h_2).(h_1 + kh_2) = 4k + 4.$$

Otteniamo quindi che π^*C è un rivestimento doppio della retta proiettiva (ossia è una curva iperellittica) ramificato su $4k+4$ punti. Applicando la formula di Riemann-Hurwitz otteniamo

$$g(\pi^*(C))) = 1 - 2 + 2k + 2 = 2k + 1 = g$$

concludendo il caso g dispari.

Consideriamo ora il caso $g = 2k + 2$ $(k \geqslant 0)$. In questo caso considereremo un rivestimento doppio di $\mathbb{F}_1$ che, ricordiamo, è lo scoppiamento del piano proiettivo in un punto. Anche in questo il gruppo di Picard è generato liberamente da due elementi: e (che rappresenta la retta eccezionale) e l (che rappresenta la generica retta del piano) che soddisfano le relazioni $e^2 = -1$, $l^2 = 1$ e $e.l = 0$. In questo caso il canonico è dato da $-3l + e$. Per ottenere una superficie K3 con un rivestimento doppio sopra $\mathbb{F}_1$ dobbiamo trovare un divisore effettivo liscio dentro $|6l - 2e|$. Questo è semplicemente richiedere di trovare una sestica B con una unica singolarità di tipo nodale sopra l'origine (un esempio è dato dall'equazione $x^2z^4 - y^2z^4 + x^6 + y^6$). Poiché questo divisore è ovviamente divisibile per due, otteniamo un rivestimento doppio $\pi\colon X \to \mathbb{F}_1$ ramificato sopra B. Come prima otteniamo che il canonico è banale e l'irregolarità nulla, ossia X è una K3. A questo punto consideriamo il sistema lineare $|(k + 1)l - ke|$ e ci chiediamo se esista una curva liscia dentro questo sistema lineare. Questo è equivalente a chiedere se esista una curva di grado $k + 1$ con un'unica singolarità nell'origine di molteplicità k che abbia k rami con tangenti diverse (in questo caso un esempio è dato da $x^kz - y^kz + x^{k+1} + 2y^{k+1}$). Sia quindi C una curva liscia dentro questo sistema lineare, la formula del genere dice che

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K) = 1 + \frac{1}{2}((k + 1)^2 - k^2 - 3k - 3 + k) = 0.$$

Inoltre

$$C.B = ((k + 1)l - ke).(6l - 2e) = 6k + 6 - 2k = 4k + 6.$$

Ragionando come prima $\pi^*(C)$ è una curva iperellittica ramificata su $4k+6$ punti e usando la formula di Riemann-Hurwitz, otteniamo

$$g(\pi^*(C) = 1 - 2 + 2k + 3 = 2k + 2 = g$$

concludendo così l'esercizio. $\square$

Esercizio 8.2. *Sia S una superficie K3. Mostrare che $H_1(S,\mathbb{Z}) = H^2(S,\mathbb{Z})_{tors} = 0$. Sia X una superficie di Enriques. Mostrare che $H^2(X,\mathbb{Z})_{tors}$ è il gruppo di ordine 2 generato da $[K]$ (e quindi $H_1(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$).*

Dimostrazione. Ricordiamo che, poiché S è una K3, $q(S) = 0$, $P_g(S) = 1$. Quindi, considerando la successione esatta lunga associata alla successione esponenziale, otteniamo

$$0 \to H^1(S,\mathbb{Z}) \to 0 \to \operatorname{Pic} S \xrightarrow{c_1} H^2(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(S,\mathcal{O}_S).$$

Notiamo subito che che $H^1(S,\mathbb{Z}) = 0$. Poiché $H^2(S,\mathcal{O}_S)$ non ha elementi di torsione, ne segue che ogni elemento di torsione in $H^2(S,\mathbb{Z})$ stia nel nucleo di α e quindi, per l'esattezza della successione, nell'immagine di c_1: per mostrare che non esistano elementi di torsione in $H^2(S,\mathbb{Z})$ basta mostrare che non esistano elementi di torsione in $\operatorname{Pic} S$. Supponiamo per assurdo che esista un elemento L di d torsione in $\operatorname{Pic} S$, questo mi permette di costruire un rivestimento non ramificato $f\colon S' \to S$ di grado d. Per la moltiplicatività della caratteristica di Eulero del fascio di struttura sappiamo che $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = d\chi(\mathcal{O}_S) = 2d$. Inoltre sappiamo che, visto che il rivestimento è non ramificato, la dimensione di Kodaira rimane la stessa e, per la classificazione delle superfici, sappiamo che non può esistere una superficie di dimensione di Kodaira 0 che abbia caratteristica di Eulero $2d$ con $d > 1$ ottenendo un assurdo.

Abbiamo quindi dimostrato che $H^2(S,\mathbb{Z})_{Tors} = 0$. Sappiamo che $H^1(S,\mathbb{Z}) = 0$ e quindi $H_1(S,\mathbb{Z})$ ha rango 0. Per il teorema dei coefficienti universali sappiamo che

$$0 \to \operatorname{Ext}^1(H_1(S,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to H^2(S,\mathbb{Z}) \to H_2(S,\mathbb{Z})^* \to 0$$

e quindi ne segue che $H_1(S,\mathbb{Z})_{Tors} = H^2(S,\mathbb{Z})_{Tors} = 0$ concludendo la dimostrazione.

Sia ora X una superficie di Enriques (ricordiamo che in questo caso $q(X) = P_g(X) = 0$) e consideriamo come prima la successione esatta lunga della successione esponenziale

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to 0 \to \operatorname{Pic} X \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Come prima abbiamo che $H^1(X,\mathbb{Z}) = 0$. Inoltre in questo caso abbiamo che $\operatorname{Pic}(X) = H^2(X,\mathbb{Z})$ per trovare gli elementi di torsione quindi basta cercare gli elementi di torsione in $Pic(X)$. Sia $L \in \operatorname{Pic}(X)$ un elemento di d torsione, come prima otteniamo un rivestimento étale e, ricordandoci che in una superficie di Enriques si ha $2K = 0$, consideriamo pure il rivestimento doppio canonico ottenendo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \bar{X} \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "g"] & X. \end{tikzcd}$$

Chiudiamo il quadrato ottenendo

$$\begin{array}{ccc}\bar{S} & \xrightarrow{\bar{g}} & \bar{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xrightarrow{g} & X\end{array}$$

in cui tutti i morfismi sono étale. ricordiamo che in questo caso S è una superficie K3 e che una tale superficie non può avere rivestimenti étale a meno che essi non siano completamente sconnessi. Quindi $\bar{S}$ è formata da d copie distinte di S ossia $g^*L = 0$. Sappiamo inoltre che $\bar{g}$ è un rivestimento doppio di $\bar{X}$ da cui segue necessariamente che $d = 2$ e che ciascuna delle due componenti connesse di $\bar{S}$ è isomorfa a $\bar{X}$ implicando che $L = K$. Abbiamo quindi mostrato che $H^2(X, \mathbb{Z})_{Tors}$ è generato da $[K]$ e,sempre per il teorema dei coefficienti universali, che $H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

9 Esercizi capitolo 9

Esercizio 9.1 (4). *Sia S una superficie di Enriques, E una curva ellittica su S. Mostrare che*

- *o $h^0(E) = 1$ e quindi $|2E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base*
- *oppure $|E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base e la sua corrispondente fibrazione ha esattamente due fibre mulltiple E_1 ed E_2 con $E \sim 2E_1 \sim 2E_2$ e $E_1 - E_2 \sim K$.*

Dimostrazione. Osserviamo che, sfruttando $2K = 0$ e la formula del genere

$$1 = 1 + \frac{1}{2}\left(E^2 + K \cdot E\right) \quad \Rightarrow \quad E^2 = 0$$

Utilizzando Riemann-Roch sulla curva ellittica E

$$h^0\left(nE\big|_E\right) - h^0\left(K_E - nE\big|_E\right) = 1 - g + deg\left(nE\big|_E\right),$$

otteniamo

$$\Rightarrow \quad h^0\left(nE\big|_E\right) = h^0\left(-nE\big|_E\right) \in \{0,1\}.$$

Utilizzando la successione esatta di definizione per E e sfruttando $q = p_g = 0$, abbiamo

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_E(E) \to 0$$

da cui

$$\begin{cases} h^0(E) = 1 + h^0\left(E\big|_E\right) \in \{1,2\}, \\ h^1(E) = h^1\left(E\big|_E\right) = h^0\left(-E\big|_E\right) \in \{0,1\}, \\ h^2(E) = 0 \end{cases} .$$

- Supponiamo $h^0(E) = 1$. Per quanto visto prima abbiamo

  $$h^0\left(E\big|_E\right) = h^0\left(-E\big|_E\right) = h^1(E) = 0$$

  Inoltre applicando Riemann-Roch su $K + E$ e sfruttando $\chi(S) = 1$ otteniamo

  $$h^0(K+E) + h^0(-E) \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad h^0(K+E) \geqslant 1.$$

  Dunque esiste $D \in |K+E|$. Poichè $D \neq E$ e $2D \in |2E|$, allora $h^0(2E) \geqslant 2$. Consideriamo ora la seguente successione esatta

  $$0 \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_S(2E) \to \mathcal{O}_E(2E) \to 0$$

  e sfruttando $h^1(E) = h^2(E) = 0$, otteniamo $h^1(2E) = h^1\left(2E\big|_E\right) \in \{0,1\}$. Dunque per Riemann-Roch

  $$h^0(2E) = 1 + h^1(2E) \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad h^0(2E) = 2$$

  da cui $|2E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base (perchè $E^2 = 0$).

- Supponiamo $h^0(E) \neq 1$, dunque per quanto visto prima $h^0(E) = 2$ da cui $|E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base. Consideriamo la fibrazione associata

$$\varphi := \varphi_{|E|} \colon S \to \mathbb{P}^1.$$

Vogliamo mostrare che ha esattamente due fibre multiple. Ricordiamo che vale la seguente formula sulle fibrazioni ellittiche

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(K_{\mathbb{P}^1}) \otimes (R^1\varphi_*\mathcal{O}_S)^\vee) \otimes \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)\mathcal{O}_S(F_i)$$

dove m_iF_i sono le sue fibre multiple. Per calcolare $R^1\varphi_*\mathcal{O}_S$, utilizziamo la successione spettrale di Leray che ci da la seguente successione esatta in grado basso

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \to H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S) \to 0,$$

$$H^2(S, \mathcal{O}_S) \cong H^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S).$$

Da cui applicando Riemann-Roch

$$h^0(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S) - h^1(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S) = 1 - 0 + \deg(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S)$$

$$\Rightarrow \quad \deg(\mathbb{P}^1, R^1\varphi_*\mathcal{O}_S) = -1$$

Poichè i fibrati su $\mathbb{P}^1$ sono determinati dal loro grado, otteniamo

$$R^1\varphi_*\mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

Dunque $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(K_{\mathbb{P}^1}) \otimes (R^1\varphi_*\mathcal{O}_S)^\vee \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ e sostituendo nella formula iniziale

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)\mathcal{O}_S(F_i).$$

Sfruttando $2K_S = 0$, abbiamo

$$\mathcal{O}_S = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes \sum_{i=1}^{k} 2(m_i - 1)\mathcal{O}_S(F_i).$$

Applicando il funtore $\varphi_* \colon \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$ all'uguaglianza (che è iniettivo), sfruttando il fatto che la fibrazione ha fibre connesse e utilizzando la formula di proiezione, otteniamo

$$\varphi_*\mathcal{O}_S = \varphi_*\left(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes \sum_{i=1}^{k} 2(m_i - 1)\mathcal{O}_S(F_i)\right)$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \otimes \sum_{i=1}^{k} \frac{2(m_i - 1)}{m_i}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

perchè $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \cong \mathcal{O}_S(m_i)F_i$. Dunque

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2(m_i - 1)}{m_i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

da cui $k = 2$ e $m_1 = m_2 = 2$. Inoltre

$$\mathcal{O}_S(K_S) = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \otimes \mathcal{O}_S(F_1) \otimes \mathcal{O}_S(F_2),$$

e quindi $2F_1 \sim 2F_2 \sim E$ con $F_1 - F_2 \sim K$.

□

Esercizio 9.2 (6)**.** *Sia S una superficie $K3$. Mostrare che se un divisore D su S soddisfa $D^2 = 0$ e $D \cdot C \geqslant 0$ per ogni curva razionale liscia, allora $D \sim kE$ dove E è una curva ellittica (e $k \geqslant 1$). Dedurre che una superficie $K3$ è ellittica se e solo se esiste un elemento non nullo nel suo gruppo di Picard tale che il suo quadrato sia nullo.*

Dimostrazione. Iniziamo nel mostrare la prima parte. Ricordiamo che se S è $K3$, allora $\chi(S) = 2$. Utilizzando Riemann-Roch, $K_S = 0$ e $D^2 = 0$, otteniamo

$$h^0(D) + h^0(-D) \geqslant 2$$

da cui $h^0(D) \geqslant 2$ oppure $h^0(-D) \geqslant 2$, perchè $D \neq 0$. Possiamo quindi supporre $h^0(D) \geqslant 2$ e che $D \in |D|$ sia effettivo. Scriviamo $D = Z + M$, dove Z è la parte fissa e M quella mobile. Vorremmo mostrare che $Z = 0$. Per far questo sia

$$Z = \sum n_i C_i, \qquad \text{con } n_i > 0 \text{ e } C_i \text{ irriducibili}$$

Allora abbiamo che

- se C_i razionale liscia, $D \cdot C_i \geqslant 0$ per ipotesi,
- se C_i non razionale, allora $1 \leqslant g(C_i) = 1 + \frac{1}{2}\left(C_i^2 + K \cdot C_i\right) \to C_i^2 \geqslant 0$. In particolare C_i è nef e $D \cdot C_i \geqslant 0$

dunque $D \cdot Z \geqslant 0$. Inoltre è chiaro che $D \cdot M \geqslant 0$, $M^2 \geqslant 0$ e $M \cdot Zz \geqslant 0$ da cui

$$0 = D^2 = D \cdot Z + D \cdot M = D \cdot Z + M^2 + Z \cdot M$$

$$\Rightarrow \quad D \cdot Z = D \cdot M = M^2 = Z \cdot M = 0.$$

$$0 = D \cdot Z = Z^2 + 2M \cdot Z + M^2 = Z^2 \quad \Rightarrow \quad Z^2 = 0$$

Utilizzando Riemann-Roch su Z otteniamo

$$h^0(Z) + h^0(-Z) \geqslant 2$$

ma Z è fisso, quindi $h^0(Z) \leqslant 1$, da cui $h^0(Z) = h^0(-Z) = 1$ e $Z = 0$. Dunque $|D| = |M|$ è senza componenti fisse, ma essendo $D^2 = 0$, non ci sono neanche punti fissi. Prendiamo il morfismo associato

$$\varphi_{|D|} \colon S \to P^{h^0(D)-1}.$$

Poichè $h^0(D) - 1 \geqslant 1$, l'immagine è una curva o una superficie, ma $D^2 = 0$ quindi deve essere una curva. Chiamiamo $\tilde{B} = \mathrm{Im}\left(\varphi_{|D|}\right)$ e sia $S \xrightarrow{p} B \xrightarrow{e} \tilde{B}$ la fattorizzaione di Stein di $\varphi_{|D|}$. Poichè $q(S) = 0$, abbiamo che $B \cong \mathbb{P}^1$ e in particolare comunque scelti k punti, $q_1 + \dots q_k \sim kq$. Detta E la fibra di p, otteniamo $D = \varphi^*(H \cap S) = \varphi^*(q_1 + \dots + q_d) \sim kE$ con $k \geqslant 1$. Inoltre

$$g(E) = 1 + \frac{1}{2}\left(E^2 + K \cdot E\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad E \text{ ellittica}$$

Abbiamo dunque dimostrato la prima parte. In particolare abbiamo ottenuto che S è ellittica.

Sia S superficie $K3$ e mostriamo

$$S \text{ ellittica } \Leftrightarrow \exists\ 0 \neq \mathcal{O}_S(D) \in \mathrm{Pic}(S) \text{ tale che } D^2 = 0.$$

"$\Rightarrow$" Basta prendere $E \subset S$ fibra della fibrazione ellittica.
"$\Leftarrow$" Se per ogni $C \subset S$ curva razionale liscia, $D \cdot C \geqslant 0$, abbiamo concluso per il punto precedente. Sia dunque C curva razionale tale che $D \cdot C < 0$. Osserviamo che C è una componente fissa di $|D|$. Consideriamo

$$s_C\colon \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(S), \qquad s_C(D) := s_C(\mathcal{O}(D)) = \mathcal{O}(D + (C \cdot D)C)$$

Ricordando che $C^2 = -2$ dalla formula del genere, osserviamo che:

- $s_C^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Pic}(S)}$.

$$s_C(s_C(D)) = D + (C \cdot D)C + (C \cdot D)C + C^2(C \cdot D)C = D$$

- $D^2 = 0 \Leftrightarrow s_C(D)^2 = 0$.

$$s_C(D)^2 = D^2 + 2D \cdot C + C^2 D \cdot C = D^2$$

- $h^0(D) \geqslant 2 \Rightarrow h^0(s_c(D)) \geqslant 2$.

  Applichiamo Riemann-Roch su $s_c(D)$

$$h^0(s_c(D)) + h^0(-s_c(D)) \geqslant 2$$

  e supponiamo per assurdo che $h^0(-s_c(D)) \geqslant 2$. Sia $E \in |-D-(C \cdot D)C|$, allora $E + D \in |kC|$ con $k > 0$ perchè $D \cdot C < 0$. Ma $C^2 = -2$, quindi $D + E = kC$. Inoltre essendo sia D che E effettivi, $D = k_1 C$ e $E = (k - k_1)C$. Ma $0 = D^2 \neq (k_1)^2 C^2 = -2(k_1)^2$, da cui $h^0(-s_c(D)) = 0$ e $h^0(s_c(D)) \geqslant 2$.

- $C \cdot D < 0 \Leftrightarrow C \cdot s_C(D) > 0$.

$$C \cdot s_C(D) = C \cdot D + (C \cdot D)C^2 = (C \cdot D)(1 + C^2) = -C \cdot D$$

- Sia H una sezione iperpiana. Allroa $H \cdot D > H \cdot s_C(D)$.

  Basta osservare che $H \cdot s_C(D) = H \cdot D + (D \cdot C)(H \cdot C) < H \cdot D$ perchè $D \cdot C < 0$ e $H \cdot C > 0$.

A questo punto, partiamo da D effettivo tale che $D^2 = 0$. Se per ogni curva razionale liscia $D \cdot C \geqslant 0$, abbiamo concluso. Altrimenti sia $D_1 = s_C(D)$ con C tale che $D \cdot C < 0$. Ricorsivamente otteniamo una successione $\{D_n\}$ di divisori effettivi e ad autointersezione nulla. Poichè

$$H \cdot D > H \cdot D_1 > H \cdot D_2 > \cdots > H \cdot D_n > \cdots \geqslant 0,$$

la successione deve essere limitata. Esiste dunque un n tale che D_n sia effettivo, $D_n^2 = 0$ e $D_n \cdot C \geqslant 0$ per ogni C razionale liscia. Da cui segue la tesi. $\square$