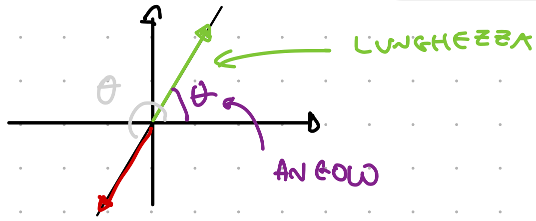
VETTORI : COORDINATE CARTESIANE E POLARI

03.11.2023

$\vec{v}$
- DIREZIONE : retta su cui giace
- VERSO : da "che parte" percorro la retta
- MODULO , lunghezza

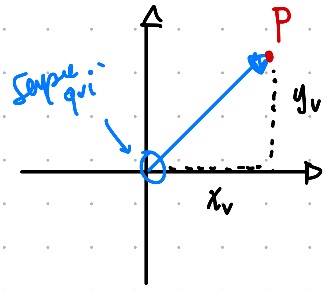


COORDINATE POLARI : $(\rho \; ; \; \theta)$

LUNGHEZZA

ANGOLO

$\vec{v}$ → DOVE SI TROVA LA TESTA : Punto corrispondente alla fine del vettore P



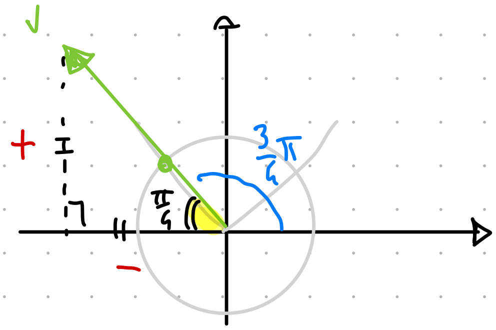
COORDINATE CARTESIANE : $\vec{v} = P = (x_v , y_v)$

COORDINATE POLARI ⇒ COORDINATE CARTESIANE

$(\rho \, ; \theta) \rightsquigarrow (\rho \cdot \cos\theta \; ; \; \rho \cdot \sin\theta)$

NO PREOCCUPAZIONI DI SEGNO

$\boxed{\text{ES}}$



$\rho = 3 \qquad \theta = \frac{3}{4}\pi$

$\vec{v} = \left(-3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

VI DOVETE PREOCCUPARE VOI DEL SEGNO

COORDINATE CARTESIANE ⇒ POLARI

$\vec{v}\,(x_v , y_v)$

LUNGHEZZA

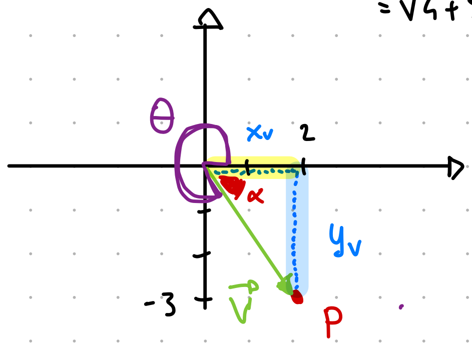
ANGOLO

① DISEGNO

ES: $\vec{v}\,(2;-3)$ $\rho = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

② LUNGHEZZA: $\rho = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$

teorema di Pitagora



③ DISEGNAMO L'ANGOLO VIOLA

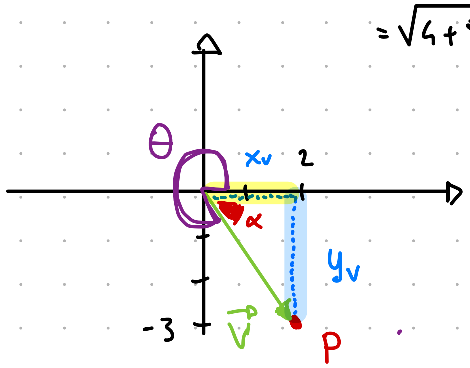
④ CALCOLARE L'ANGOLO ROSSO

- $y_v = \rho \cdot \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{y_v}{\rho} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{y_v}{\rho}\right)$
- $x_v = \rho \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{x_v}{\rho} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x_v}{\rho}\right)$
- $y_v = x_v \cdot \tan\alpha \rightarrow \tan\alpha = \frac{y_v}{x_v} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_v}{x_v}\right)$

! ATTENZIONE AI SEGNI !
↓
MODULO (segmenti)

⑤ OTTENIAMO L'ANGOLO VIOLA $= 2\pi -$ ROSSO

ES: $\vec{v}\,(2;-3)$ $\rho = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$



Per trovare α:

Con la calcolatrice
↓

$3 = \sqrt{13} \cdot \sin\alpha \rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

oppure

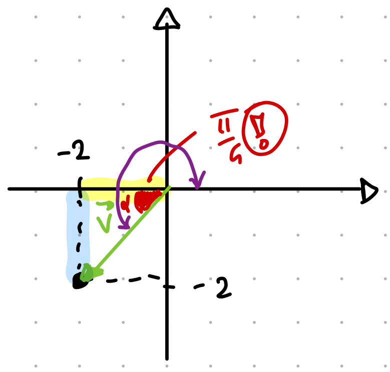
$2 = \sqrt{13} \cdot \cos\alpha \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

oppure

$3 = 2 \cdot \tan\alpha \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$\theta = 2\pi - \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

ES: $\vec{v}\,(-2;\,-2)$



MODULO: $\rho = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

portando fuori un 2

ANGOLO α:

lo conosciamo!

Non c'è bisogno!

$2\sqrt{2}\cdot\sin\alpha = 2 \to \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

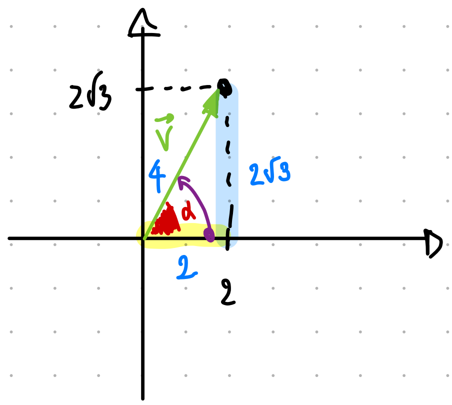
$2\sqrt{2}\cdot\cos\alpha = 2 \to \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$2 = \tan\alpha\, 2 \to \alpha = \tan^{-1}(1)$

ANGOLO θ: $\pi+\alpha = \pi+\frac{\pi}{4} = \frac{4\pi+\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

Dipende dal disegno!

ES: $\vec{v}\,(2;\,2\sqrt{3})$



MODULO: $\sqrt{(2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$

$\boxed{\rho = 4}$

ANGOLO α: $2\sqrt{3} = 4\cdot\sin\alpha$

lo conosco!!

$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

ANGOLO $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$

OPERAZIONI TRA VETTORI

- Algebricamente
- Geometricamente

$\vec{v}$ coord. Polari o Cartesiane

$\vec{w}$ coord. Polari o Cartesiane

LE OPERAZIONI SI FANNO IN CARTESIANE!

SOMMA DI VETTORI

Def: Dati due vettori $\vec{v}=(x_v, y_v)$ e $\vec{w}=(x_w; y_w)$, la SOMMA e'

$$\vec{v}+\vec{w} = (x_v + x_w \;;\; y_v + y_w)$$

ES:

$\vec{v}: (2; -5)$

$\vec{w}\ (-3; 2)$

$\vec{v}+\vec{w}\ (2-3\ ;\ -5+2)$

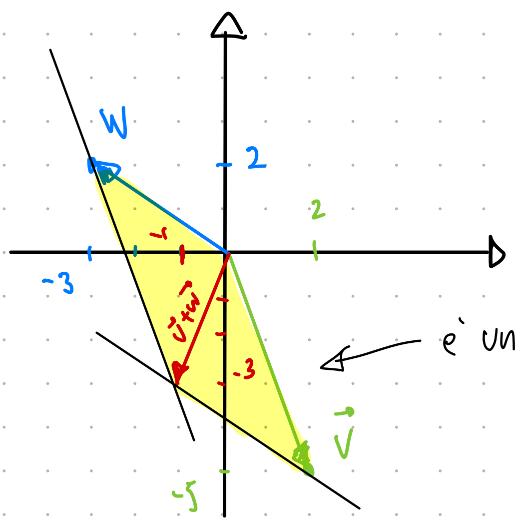
$(-1; -3)$

LA SOMMA $\vec{v}+\vec{w}$ e' UN VETTORE CHE SI OTTIENE SOMMANDO coordinata per coordinata

RAPPRESENTIAMO GEOMETRICAMENTE:

$\vec{v}\,(2; -5)$ $\vec{w}\,(-3; 2)$

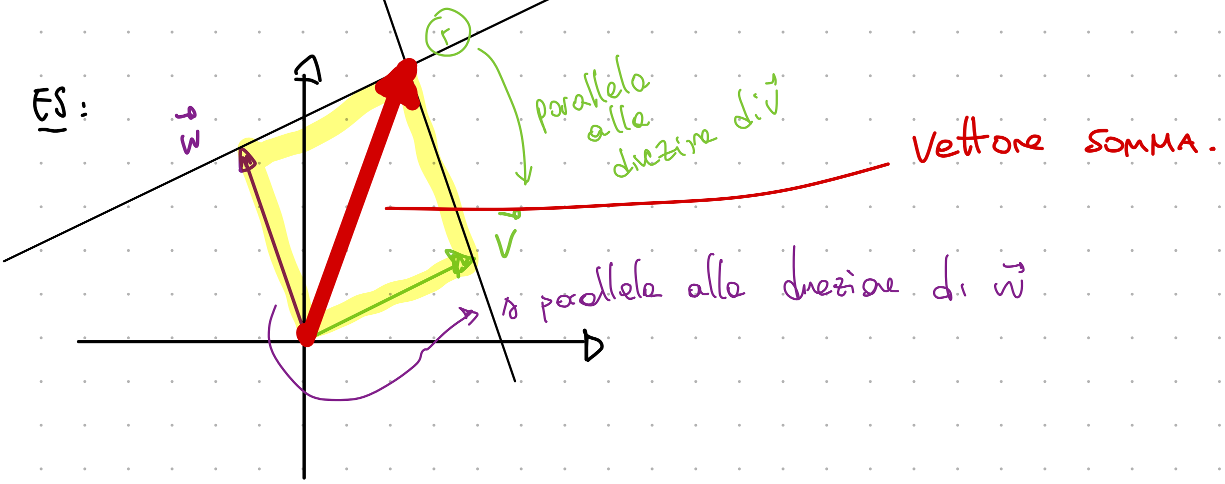
$\vec{v}+\vec{w}\,(-1; -3)$



e' UN PARALLELOGRAMMA!

Oss: Geometricamente la somma si trova sulla diagonale di estremo nell'origine del parallelogramma formato dai vettori.

ES:

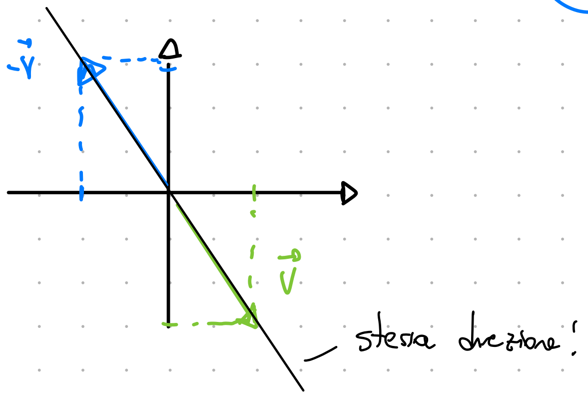


OPPOSTO DI UN VETTORE

Def: l'**OPPOSTO** DI UN VETTORE $\vec{v}(x_v, y_v)$ è $-\vec{v} = (-x_v ; -y_v)$

GEOMETRICAMENTE è un vettore che ha stessa direzione di $\vec{v}$, stesso modulo, ma verso opposto

ES: $\vec{v}(2; -3)$ → l'OPPOSTO è $-\vec{v}(-2; +3)$



SOTTRAZIONE TRA VETTORI

Def: Dati due vettori $\vec{v}(x_v, y_v)$ e $\vec{w}(x_w ; y_w)$, la **DIFFERENZA** è

$$\vec{v} - \vec{w} = (x_v - x_w , y_v - y_w)$$

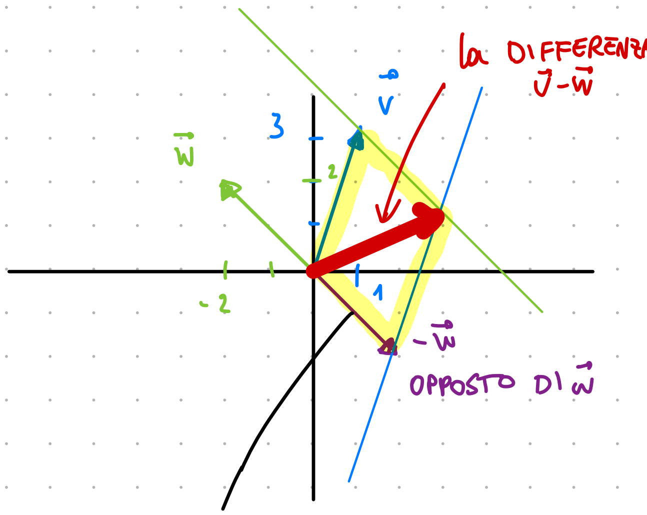
OSS: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$ cioè la DIFFERENZA è LA SOMMA TRA $\vec{v}$ e l'OPPOSTO DI $\vec{w}$

GEOMETRICAMENTE prima faccio l'opposto di $\vec{w}$, poi sommo con la regola del parallelogramma.

ES: $\vec{v}\,(1, 3)$ −

$\vec{w}\,(-2\,;\,2)$ =

$\vec{v}-\vec{w}: \left(1-(-2)\,;\,3-(2)\right) = (3\,;\,1)$



Il parallelogramma e' tra $\vec{v}$ e $-\vec{w}$

MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

NUMERO! NON UN VETTORE!

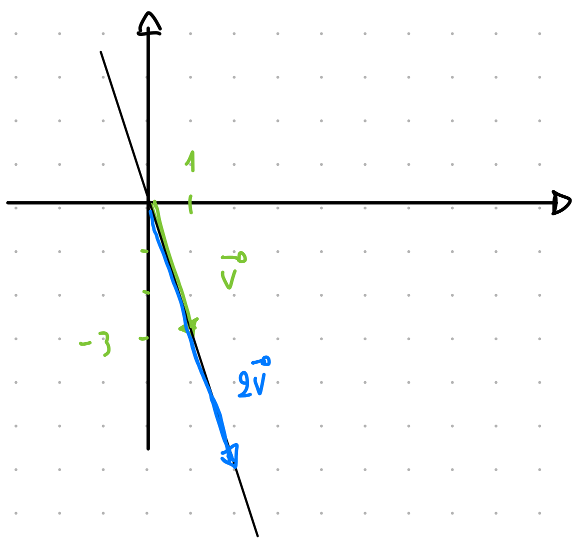
Def: Dato un VETTORE $\vec{v}\,(x_v, y_v)$ e uno SCALARE $a \in \mathbb{R}$, la **MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE** e'

$$a \cdot \vec{v} = (a\,x_v\,;\,a\,y_v)$$

GEOMETRICAMENTE il vettore preserva la direzione, ma il modulo viene moltiplicato per a. (! se a < 0 cambia il verso)

ES: $\vec{v}\,(1\,;\,-3)$ $\quad a = 2$

$a \cdot \vec{v}\,\left(2 \cdot 1\,;\,2(-3)\right) = (2\,;\,-6)$

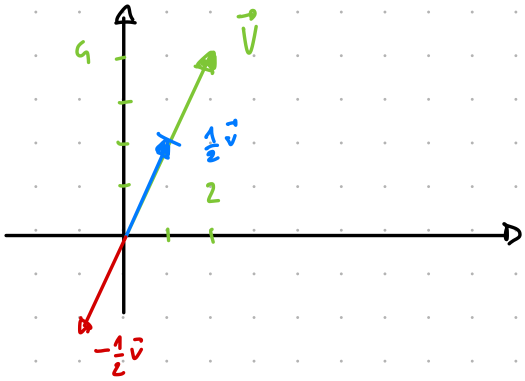


ES: $\vec{v}(2;4)$ $\quad a = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\vec{v} = (1,2)$

$a = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\vec{v} = (-1;-2)$



PRODOTTO SCALARE (non e' prodotto per scalare)

Def: Dati 2 vettori $\vec{v}(x_v, y_v)$ e $\vec{w}(x_w \text{ e } y_w)$ il PRODOTTO SCALARE e' $\vec{v}\cdot\vec{w} = x_v \cdot x_w + y_v \cdot y_w$

OSS: E' UN NUMERO, quindi non puo' essere rappresentato sul piano cartesiano

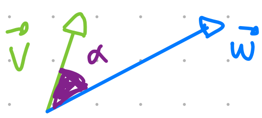
ESEMPIO:

$$\begin{array}{l} \vec{v}\ (2;3) \\ \vec{w}\ (-1;4) \\ \hline \vec{v}\cdot\vec{w} = 2\cdot(-1) + 3\cdot 4 = -2+12 = 10 \end{array}$$

⚠ NON e' UN VETTORE

CONSIGLIO: Passate sempre dalle cartesiane e poi applicate la definizione

TEOREMA: $\vec{v}$ di modulo ρ_v ; $\vec{w}$ di modulo ρ_w ; α l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$



$$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = \rho_v \cdot \rho_w \cdot \cos\alpha$$

PRODOTTO VETTORIALE

Def: Dati due vettori $\vec{v}\,(x_v, y_v)$ e $\vec{w}\,(x_w; y_w)$ il **PRODOTTO VETTORIALE** e' $\vec{v} \times \vec{w} = (0; 0; x_v \cdot y_w - y_v \cdot x_w)$

ESCE DAL PIANO!

Direzione dell'asse z

ES:

$$\vec{v}\,(2; -1)$$
$$\vec{w}\,(3; -4)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} : (0; 0; 2 \cdot (-4) - 3(-1)) = (0; 0; -8 + 3) = (0; 0; -5)$$

GEOMETRICAMENTE: Regola mano dx (in classe)

TEOREMA: $\vec{v}$ di modulo ρ_v; $\vec{w}$ di modulo ρ_w; α angolo compreso

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \rho_v \cdot \rho_w \cdot |\sin \alpha|$$

(to be continued..)

RIASSUMENDO...

le OPERAZIONI SI FANNO IN COORDINATE CARTESIANE!

$\vec{v}(x_v, y_v)$ $\vec{w}(x_w, y_w)$

SOMMA	$\vec{v}+\vec{w}$	$(x_v + x_w \,;\, y_v + y_w)$	sommo le coordinate
DIFF.	$\vec{v}-\vec{w}$	$(x_v - x_w \,;\, y_v - y_w)$	diff. tra coordinate
SCALARE	$a\vec{v}$	$(a x_v \,;\, a y_v)$	Moltiplico a per le coord.
PRODOTTO SCALARE	$\vec{v}\cdot\vec{w}$	$x_v x_w + y_v y_w$	NUMERO! $\vec{v}(x_v ; y_v)$ $\vec{w}(x_w , y_w)$
PRODOTTO VETTORIALE	$\vec{v}\times\vec{w}$	$(0 ; 0 ; x_v y_w - x_w y_v)$	vettore 3D! $\vec{v}(x_v , y_v)$ $\vec{w}(x_w , y_w)$