# Soluzioni [1]

1.

Posto $f(x,y,z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3$, risulta $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0) = 12\sqrt{3} \neq 0$.
Questo garantisce la possibilità di rappresentare localmente la superficie nella forma $z = \varphi(x,y)$.
Poiché $z^2(x,y) + xyz(x,y) - xy^2 - x^3 = 0 \quad \forall (x,y) \in U(P_0)$, derivando si ottiene

$$2zz'_x + yz + xyz'_x - y^2 - 3x^2 = 0 \quad \downarrow \quad z'_x(P_0) = 0$$

$$2zz'_y + xz + xyz'_y - 2xy = 0 \quad \downarrow \quad z'_y(P_0) = 0.$$

Dunque $P_0$ è un punto stazionario per $\varphi(x,y)$.
Derivando ulteriormente:

$$2z'^2_x + 2zz''_{xx} + 2yz'_x + xyz''_{xx} - 6x = 0 \quad \downarrow \quad z''_{xx}(P_0) = -\sqrt{3}$$

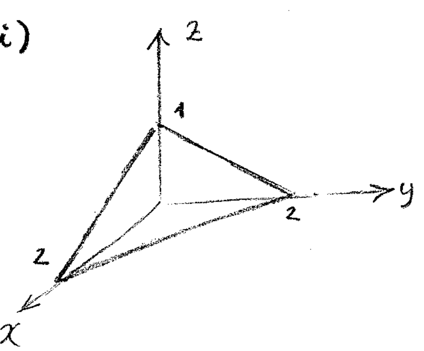
$$2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} + z + yz'_y + xz'_x + xyz''_{xy} - 2y = 0 \quad \downarrow \quad z''_{xy}(P_0) = 0$$

$$2z'^2_y + 2zz''_{yy} + 2xz'_y + xyz''_{yy} - 2x = 0 \quad \downarrow \quad z''_{yy}(P_0) = -1/\sqrt{3}.$$

$$\mathcal{H}(P_0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$P_0$ è un punto di massimo locale

2. (i)




$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{\frac{2-x-y}{2}} 2z\,dz =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y-2)^2\,dy = -\frac{1}{12} \int_0^2 (x-2)^3\,dx = \frac{1}{3}$$

Il flusso attraverso le facce che stanno sui piani cartesiani è nullo, perché in tutti i casi è nulla la componente normale del campo.

Ad es.: sulla faccia nel piano $z=0$ risulta $F = (0,-y,0)$, $N = (0,0,-1)$.
La faccia trasversale si parametrizza nella forma $x = u$, $y = v$, $z = (2-u-v)/2$ con $(u,v)$ che varia nel triangolo $T = \{u, v \geq 0,\ u+v \leq 2\}$, $\phi_u \wedge \phi_v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.
Su questa superficie è $F = (u(2-u-v), -v, (2-u-v)/2)$,
Il flusso è dato da

$$\int_0^2 du \int_0^{2-u} \left( u - \frac{u^2}{2} - \frac{uv}{2} - \frac{v}{2} - \frac{u+v-2}{2} \right) dv = \dots = \frac{1}{3}$$

2. (ii)

$\mathrm{rot} F = (0, 2x, 0)$

La superficie attraverso cui calcolare il flusso è quella vista nel calcolo precedente.

$$\int_S \mathrm{rot}F \cdot N \, dS = \iint_T (0, 2u, 0)\cdot\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right) du\,dv = \int_0^2 u\,du \int_0^{2-u} dv = \frac{4}{3}.$$

Calcoliamo la circuitazione lungo il bordo.

Segmento da $(2,0,0)$ a $(0,2,0)$ $\quad \int_0^1 (0,-2t,0)\cdot(-2,2,0)\,dt = -2$

$$X = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Segmento da $(0,2,0)$ a $(0,0,1)$ $\quad \int_0^1 (0, 2t-2, t)\cdot(0,-2,1)\,dt = \frac{5}{2}$

$$X = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Segmento da $(0,0,1)$ a $(2,0,0)$ $\quad \int_0^1 (4t-4t^2, 0, 1-t)\cdot(2,0,-1)\,dt = \frac{5}{6}$

$$X = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Circuitazione complessiva: $4/3$.

3\.

C.E. $\quad x \in \mathbb{R}, \; y \in (0, \pi]$ $\qquad A(x) = 1, \quad B(y) = \dfrac{\mathrm{sen}\, y}{1-\cos y}, \quad B'(y) = -\dfrac{1}{1-\cos y}$

esistono continue nel C.E.
Vale dunque il teorema di Cauchy.

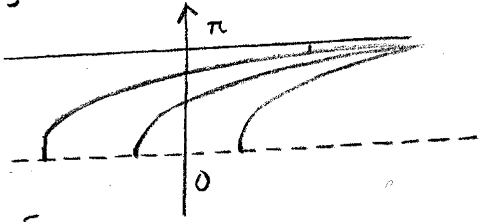
$y = \pi$ soluzione costante

$$\int \frac{1-\cos y}{\mathrm{sen}\, y}\,dy = \int dx \Rightarrow \int \frac{\mathrm{sen}\, y\,(1-\cos y)}{\mathrm{sen}^2 y}\,dy = \int dx \Rightarrow \int \frac{\mathrm{sen}\, y}{1+\cos y}\,dy = \int dx$$

$$-\lg(1+\cos y) = x - c \Rightarrow \lg(1+\cos y) = c - x \Rightarrow 1+\cos y = K e^{-x} \;\; (K>0) \Rightarrow$$

$y = \arccos(K e^{-x} - 1)$

Deve essere $-1 < K e^{-x} - 1 < 1 \Rightarrow 0 < K e^{-x} < 2 \Rightarrow x > \lg \frac{K}{2}$




4\.

Polinomio caratteristico $K^3 - 1 = 0$ per $K = 1$, $K = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Base di $V_0$: $e^x$, $e^{-x/2}\cos\sqrt{3}x/2$, $e^{-x/2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}x/2$.

Passando in campo complesso: $z''' - z = e^{ix}$; cerchiamo una slz. particolare $\bar{z} = A e^{ix}$. Sostituendo, si trova $A = \frac{i-1}{2}$.

$\bar{y}(x) = \mathrm{Re}\,\bar{z}(x) = \mathrm{Re}\;\frac{1}{2}(i-1)(\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x) = -\frac{1}{2}(\cos x + \mathrm{sen}\, x)$.

In conclusione,

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2}\cos\sqrt{3}x/2 + c_3 e^{-x/2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}x/2 - \frac{1}{2}(\cos x + \mathrm{sen}\, x).$$

# Soluzioni [2]

Le considerazioni e i calcoli sono del tutto analoghi a quelli visti in [1].

1. $\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = 12\sqrt{3} \neq 0$

$\nabla\varphi(P_0) = (0,0)$ $\qquad \mathcal{H}(P_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\qquad P_0$ punto di minimo locale

2. (i)

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{(2-x-y)/2} 2z\, dz = \frac{1}{3}$$

Flusso sulla faccia trasversale: $x = u$, $y = v$, $z = (2-u-v)/2$ con $(u,v) \in T = \{u, v \geq 0,\ u+v \leq 2\}$.

$F = (-u,\ v(2-u-v),\ \frac{1}{2}(2-u-v))$ $\qquad \phi_u \wedge \phi_v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

Il flusso è dato da:

$$\int_0^2 du \int_0^{2-u} \left(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v(2-u-v) + \frac{1}{2}(2-u-v)\right) du\, dv = \dots = \frac{1}{3}$$

2. (ii)

$\operatorname{rot} F = (-2y, 0, 0)$

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \iint_T (-2v, 0, 0)\cdot(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1)\, du\, dv = \int_0^2 du \int_0^{2-u} -v\, dv = -\frac{4}{3}$$

Calcolo della circuitazione:

$$\int_0^1 (2t-2, 0, 0)\cdot(-2,2,0)\, dt = \int_0^1 (4-4t)\, dt = 2$$

$$\int_0^1 (0,\ 2t(2-2t),\ t)\cdot(0,-2,1)\, dt = \int_0^1 (-8t(1-t)+t)\, dt = -\frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 (-2t, 0, 1-t)(2,0,-1)\, dt = \int_0^1 (-1-3t)\, dt = -\frac{5}{2}$$

Circuitazione complessiva $-4/3$.

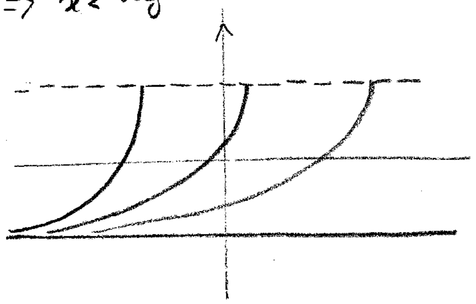
3.

$y = -\frac{\pi}{2}$ soluzione costante $\qquad \int \frac{\cos y\,(1-\operatorname{sen} y)}{\cos^2 y}\, dy = \int dx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{1+\operatorname{sen} y}\, dy = \int dx$

$\int \frac{1-\operatorname{sen} y}{\cos y}\, dy = \int dx \Rightarrow$

$\lg(1+\operatorname{sen} y) = x - c \Rightarrow 1 + \operatorname{sen} y = Ke^x \ (K>0) \Rightarrow y = \operatorname{arcsen}(Ke^x - 1)$

Deve essere $-1 < Ke^x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < Ke^x < 2 \Rightarrow x < \lg 2/K$.



4. Stessi calcoli che in [1]
unica differenza: $\bar{y} = \operatorname{Im} \bar{z}$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2} \cos \sqrt{3}x/2 + c_3 e^{-x/2} \operatorname{sen} \sqrt{3}x/2 +$

$+ \frac{1}{2}(\cos x - \operatorname{sen} y)$