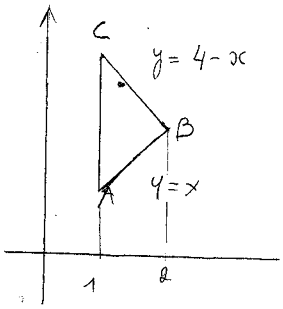
Soluzioni

1.



Formule G.G.

$$\int_\gamma f\,dx = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy \qquad f = 2(x^2+y^2)$$

$$\int_\gamma g\,dy = \iint_D \frac{\partial g}{\partial x}\,dx\,dy \qquad g = (x+y)^2$$

$$\mathcal{L} = \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (2x-2y)\,dy = \int_1^2 \left[2xy - y^2\right]_x^{4-x} dx = \int_1^2 (-4x^2+16x-16)\,dx$$

$$= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - 16x\right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

2.

$f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \qquad g = x^2 + y^2 + z - 1 \qquad \nabla g = (2x, 2y, 1) \neq 0$

non ci sono punti singolari sulla superficie $g = 0$.

$$\mathcal{L} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2+y^2+z-1)$$

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ 6z + \lambda = 0 \\ x^2+y^2+z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ \lambda = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -2 \\ z = 1/3 \\ y = \pm\sqrt{2/3} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z = 1/6 \\ x = \pm\sqrt{5/6} \end{cases}$$

$$f(0,0,1) = 3, \quad f(0, \pm\sqrt{2/3}, 1/3) = 7/3, \quad f(\pm\sqrt{5/6}, 0, 1/6) = 11/12$$

Per il bordo $\begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ si può ripetere il calcolo con i moltiplicatori:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ ha caratteristica 1 se $x = y = 0$. Sulla curva non c'è nessun punto singolare.

$$\mathcal{L} = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda z + \mu(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} 2x + 2\mu x = 0 \\ 4y + 2\mu y = 0 \\ 6z + \lambda = 0 \\ z = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \ldots$$

$(0, \pm 1, 0)$ la fz vale 2

$(\pm 1, 0, 0)$ la fz vale 1.

In conclusione $\max f = 3$, $\min f = 11/12$.

Oppure si può parametrizzare la curva nella forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$; la funzione diventa $\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta = 1 + \operatorname{sen}^2\theta$. In questo modo si trova subito che il massimo sulla curva vale 2, il minimo 1.

3. CE: $x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen}x\,(3y^2-1) \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

Vale il teorema di esistenza e unicità locale.

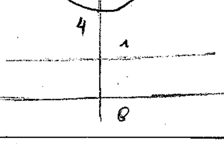
Soluzioni costanti: $y = 0$, $y = \pm 1$. Nessuna di queste verifica la C.I. $y(0) = 4$.

Possiamo supporre $y > 1$. Risolviamo l'eq. a variabili separate.

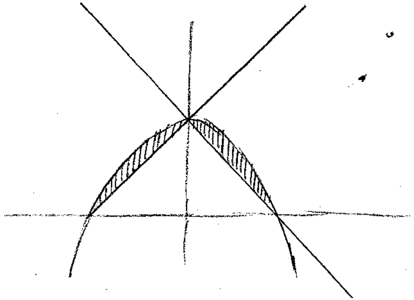
$$\int \frac{dy}{y(y^2-1)} = \int \operatorname{sen}x\,dx \iff \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2(y^2-1)}\,dy = \int \operatorname{sen}x\,dx \iff \frac{1}{2}\lg\frac{y^2-1}{y^2} = \frac{1}{2}c - \cos x$$

Imponiamo la CI: $\frac{1}{2}\lg\frac{15}{16} = \frac{1}{2}c - 1 \iff \lg\frac{15}{16} = c - 2 \iff c = \lg\frac{15}{16}e^2$.

$$y(x) = \frac{4}{\sqrt{16 - 15e^{2(1-\cos x)}}}, \qquad |x| < \arccos\lg\left(\frac{\sqrt{15}}{4}e\right)$$



4. Sezione X,Z $\quad (1-z)^2 \le x^2 \le 1-z \iff \begin{array}{l} z \le 1-x^2 \\ 1-|x| \le z \le 1+|x| \end{array}$



Quindi il solido richiesto è la parte compresa tra paraboloide e cono.

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1-(x^2+y^2) \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

$$V = \iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_{1-\sqrt{x^2+y^2}}^{1-(x^2+y^2)} dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right) dx\,dy = 2\pi \int_0^1 (r^2-r^3)\,dr = \frac{\pi}{6}.$$