Punti di massimo o di minimo per funzioni di n variabili reali

Dati $f : A \subset R^n \to R$ ed $X_0 \in A$, X_0 si dice :

- punto di minimo assoluto se $\forall X \in A$, $f(x) \geq f(X_0)$
- punto di massimo assoluto se $\forall X \in A$, $f(x) \leq f(X_0)$
- punto di minimo locale se $\exists\ U(X_0) : \forall X \in A \cap U(X_0)$, $f(x) \geq f(X_0)$
- punto di massimo locale se $\exists\ U(X_0) : \forall X \in A \cap U(X_0)$, $f(x) \leq f(X_0)$.

In modo equivalente possiamo scrivere:

- punto di minimo locale se $\exists\ U(\mathbf{0}) : \forall H \in R^n \cap U(\mathbf{0})$, $f(X_0 + H) \geq f(X_0)$
- punto di massimo locale se $\exists\ U(\mathbf{0}) : \forall H \in R^n \cap U(\mathbf{0})$, $f(X_0 + H) \leq f(X_0)$.

<u>Teorema 1</u> (condizione necessaria)

$f : A \subset R^n \to R$ di classe C^1 su un aperto A , $X_0 \in A$ di massimo o minimo $\Rightarrow$ grad $f(X_0) = \mathbf{0}$.

(i punti in cui gradf = 0 si dicono stazionari)

Non vale il viceversa.

Ad esempio, $f(x, y) = x\,y$ oppure $f(x, y) = x^2 - y^2$ oppure $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

In questi casi $\mathbf{0}$ è un punto stazionario, ma non è un estremante (cioè non è di massimo né di minimo), perché in ogni suo intorno la differenza $f(X) - f(\mathbf{0})$ non ha segno costante: lo chiameremo punto di sella.

Osservare che per la terza funzione $\mathbf{0}$ è punto di minimo su ogni retta per l'origine, senza essere di minimo globalmente.

Per stabilire se un punto stazionario X_0 è un estremante, occorre dunque studiare il segno della differenza $f(X) - f(X_0)$ in un intorno di X_0 o equivalentemente quello della differenza $f(X_0 + H) - f(X_0)$ in un intorno di $\mathbf{0}$.

Se f è una funzione di classe C^2 e X_0 un punto stazionario interno al dominio A della funzione, la formula di Taylor diventa:

$$f(X_0 + H) - f(X_0) = \tfrac{1}{2}\mathscr{H}(X_0)\,H \cdot H + o(\|H\|^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}Q(H) + o(\|H\|^2).$$

La funzione $Q(H)$ si dice forma quadratica associata alla matrice hessiana.

Il segno della forma quadratica Q (H) determina localmente quello del secondo membro, e quindi anche quello della differenza a primo membro.

Teorema 2

Siano f una funzione di classe C^2 , X_0 un punto stazionario interno al dominio A della funzione e Q (H) la forma quadratica associata alla matrice hessiana in X_0.

Q (H) definita positiva (cioè $Q(H) > 0 \quad \forall H \in R^n - \{ \mathbf{0} \}$) $\Rightarrow$ X_0 di minimo locale

Q (H) definita negativa (cioè $Q(H) < 0 \quad \forall H \in R^n - \{ \mathbf{0} \}$) $\Rightarrow$ X_0 di massimo locale

Q (H) indefinita (cioè $\exists$ H, K : $Q(H) < 0 < Q(K)$) $\Rightarrow$ X_0 di sella.

dimostrazione

Q (H) è continua sul compatto S = $\left\{ H \in R^n : \| H \| = 1 \right\}$ e dunque qui assume valore minimo m e valore massimo M. Inoltre se H ≠ **0** , $H / \| H \| \in S$.

Dunque, se H ≠ **0** si ha $m \leq Q(H / \| H \|) \leq M$.

Ma $Q(H / \| H \|) = Q(H) / \| H \|^2$, e dunque :

$$m \| H \|^2 \leq Q(H) \leq M \| H \|^2 .$$

Di conseguenza:

- Se Q (H) è definita positiva, risulta m > 0.

  $f(X_0 + H) - f(X_0) \geq ½ m \| H \|^2 + o(\| H \|^2) = \| H \|^2 (½ m + o(1))$.

  Per il teorema della permanenza del segno, il termine entro parentesi è positivo in un intorno di 0 e dunque lo è anche il primo membro.

- Se Q (H) è definita negativa, risulta M < 0.

  $f(X_0 + H) - f(X_0) \leq ½ M \| H \|^2 + o(\| H \|^2) = \| H \|^2 (½ M + o(1))$.

  Per il teorema della permanenza del segno, il termine entro parentesi è negativo in un intorno di 0 e dunque lo è anche il primo membro.

- Se Q (H) è indefinita, sia K $\in$ S : Q (K) ≠ 0. Allora:

$f(X_0 + tK) - f(X_0) = t^2(\ \tfrac{1}{2} Q(K) + o(1)\ )$.

A seconda che sia stato scelto K tale che $Q(K) > 0$ oppure $Q(K) < 0$, concludiamo che nella direzione di K il punto X_0 è di minimo o di massimo. Dato che $Q(H)$ è indefinita, possiamo effettuare entrambe le scelte e concludere che il punto è di sella.

✔

Le condizioni stabilite dal teorema sono solo sufficienti.

Ad esempio, l'origine è punto di minimo assoluto per la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4$; la forma quadratica associata alla matrice hessiana è $2x^2$ e non è non è definita positiva (è semidefinita positiva).

Quando la matrice hessiana è nulla, non si può dedurre alcuna informazione; ci sono direzioni lungo le quali il segno della variazione $f(X_0 + H) - f(X_0)$ non può essere valutato con i metodi del secondo ordine e servirebbe un'approssimazione migliore. Ad esempio, per le funzioni $f(x, y) = x^4 + y^4$, $f(x, y) = -x^4 - y^4$, $f(x, y) = x^4 - y^4$ l'origine è un punto stazionario con matrice hessiana nulla: nel primo caso è un punto di minimo, nel secondo di massimo, nel terzo di sella.

Il caso particolare delle funzioni di due variabili.

$$\mathscr{H}(X_0) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \qquad Q(H) = a x^2 + b y^2 + 2 c x y .$$

- se $a = b = c = 0$ la matrice è nulla e non si può utilizzare il procedimento
- se $a = b = 0$, $c \neq 0$ la forma quadratica è indefinita
- se $a \neq 0$ (analogamente se $a = 0$, $b \neq 0$)

$$Q(H) = a\left(x^2 + 2\frac{c}{a} x y + \frac{b}{a} y^2\right) = a\left(x^2 + 2\frac{c}{a} x y + \frac{c^2}{a^2} y^2 + \frac{ab - c^2}{a^2} y^2\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{c}{a} y\right)^2 + \frac{\Delta}{a^2} y^2\right]$$

Si ottiene dunque:

$a > 0$, $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ forma quadratica definita positiva

Infatti la quantità in parentesi è la somma di due quadrati che si annulla quando $x + (c / a) y = y = 0$, e questo accade solo nell'origine.

Inoltre il coefficiente moltiplicativo a è positivo.

$a < 0$, $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ forma quadratica definita negativa

$\Delta < 0 \qquad \Rightarrow$ forma quadratica indefinita

Infatti la quantità in parentesi è la differenza di due quadrati e si annulla lungo due direzioni che dividono il piano in regioni in cui ha segni diversi.

✔

Ad esempio, la forma quadratica Q (H) = 2 x^2 + 2 x y + y^2 associata alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è definita positiva: a = 2 > 0 , Δ = 1 > 0.

La scomposizione vista nel caso diventa $\left[\left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{y^2}{4} \right]$.

Segno della forma quadratica e autovalori della matrice hessiana (metodo analitico)

Data una matrice quadrata $\mathscr{A}$, un numero λ si dice autovalore se l'equazione $\mathscr{A}$ X = λ X ammette una soluzione non nulla (e allora ne ammette infinite, che formano uno spazio vettoriale); le soluzioni corrispondenti si dicono auto vettori. Ogni matrice reale simmetrica di ordine n ammette n autovalori (se contati con la loro molteplicità). Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione det ($\mathscr{A}$ - λ I) = 0 , dove I indica la matrice identica di ordine n.

Partiamo dalle uguaglianze:

$$\frac{Q(H)}{\|H\|^2} = Q\left(\frac{H}{\|H\|} \right) = Q(\overline{H})$$

dove H è un vettore non nullo di R^n ed $\overline{H}$ il versore individuato da H.

La funzione Q ($\overline{H}$) è definita sul compatto S = $\left\{ H \in R^n : \|H\| = 1 \right\}$ e dunque ammette massimo e minimo. Data l'uguaglianza, anche la funzione $\frac{Q(H)}{\|H\|^2}$ ammette massimo e minimo in R^n - { **0** } che è un aperto: questi valori devono dunque essere assunti in punti stazionari.

Deve dunque essere:

$$\text{grad} \frac{Q(H)}{\|H\|^2} = [\ (2 \mathscr{H} H)\ \|H\|^2 - (\mathscr{H} H \cdot H)\ 2 H\ ] \ / \ \|H\|^4 = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\mathscr{H} H = Q(\overline{H})\ H.$$

Questo prova che il massimo e il minimo della funzione $\dfrac{Q(H)}{\|H\|^2}$ sono due autovalori della matrice hessiana.

D'altra parte ogni autovalore della matrice è un valore assunto dalla matrice hessiana.

Infatti, sia $\mathscr{H}$ K = λ K per un vettore non nullo K ; moltiplichiamo ambo i membri scalarmente per K, ottenendo $\mathscr{H}$ K · K = $\lambda\ \|K\|^2$, cioè λ = ($\mathscr{H}$ K · K) / $\|K\|^2$.

Dunque :

> il massimo M e il minimo m della funzione $\dfrac{Q(H)}{\|H\|^2}$ sono rispettivamente il più grande e il più piccolo degli autovalori della matrice $\mathscr{H}$.

✔

Questo prova il seguente risultato:

<u>Teorema 3</u>

$\mathscr{H}$ ha solo autovalori positivi $\Rightarrow$ m > 0 $\Rightarrow$ forma quadratica definita positiva

$\mathscr{H}$ ha solo autovalori negativi $\Rightarrow$ M < 0 $\Rightarrow$ forma quadratica definita negativa

$\mathscr{H}$ ha autovalori di entrambi i segni $\Rightarrow$ m < 0 < M $\Rightarrow$ forma quadratica indefinita.

Segno della forma quadratica e autovalori della matrice hessiana (metodo algebrico)

Le matrici M simmetriche hanno le seguenti proprietà:

- gli autovalori sono reali come pure gli auto vettori
- esistono n autovettori indipendenti V_i che formano una base ortonormale di R^n
- la matrice S le cui colonne sono gli autovettori di M è ortogonale (cioè $S^t = S^{-1}$) e diagonalizza M; precisamente:

$$S^t\, M\, S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove λ_i è l'autovalore corrispondente a V_i.

Consideriamo la forma quadratica Q (H) = MH · H che possiamo riscrivere nella forma equivalente H^t M H se interpretiamo i vettori H come vettori colonna. L'idea è quella scrivere Q come somma di termini al quadrato moltiplicati per gli autovalori : risalire al segno di Q diventa allora immediato.

Da $S^t M S = D$ si ricava $M = S D S^t$, da cui segue:

$Q (H) = H^t M H = H^t (S D S^t) H = (S^t H)^t D (S^t H)$.

Posto $K = S^t H$, si trova

$$Q (H) = Q (S K) = K^t D K = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i^2 .$$

D'altra parte, essendo S invertibile, K ≠ **0** perché H ≠ **0**.

Quindi il segno della forma quadratica Q (H) è individuato da quello degli autovalori di M.

✔

Come ottenere il segno degli autovalori senza doverli calcolare

Il calcolo degli autovalori è immediato solo per le matrici di ordine 2; negli altri casi possiamo ricorrere ad un metodo che usa i determinanti Δ_k delle n sottomatrici M_k composte dalle prime k righe e k colonne di M (minori di nord-ovest):

$$M_1 = (a_{11}) \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots \; M_n = M.$$

Teorema 4

- Tutti i Δ_k sono positivi $\Rightarrow$ la forma quadratica è definita positiva.
- I Δ_k hanno segno alternato cominciando da Δ_1 che è negativo $\Rightarrow$ la forma quadratica è definita negativa.
- $\Delta \neq 0$ e non siamo nei casi precedenti $\Rightarrow$ la forma quadratica è indefinita.
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ non si può concludere: la forma non è definita, ma può essere indefinita o semidefinita.

Per una matrice diagonale il risultato è ovvio, dato che $\Delta_k = \lambda_1 \cdots \lambda_k$.

Esempio

Per la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ si ha : $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 5 > 0$, $\Delta_3 = 10 > 0$; la forma quadratica associata è definita positiva.

Osservazione

Nel caso n = 2 il metodo dei minori di nord-ovest fornisce i risultati già noti.

Infatti:

det (M - λ I) = 0 $\Leftrightarrow$ (a - λ) (b - λ) - c^2 = 0 $\Leftrightarrow$ $\lambda^2 - (trM) \lambda + \Delta = 0$ (dove trM = a + b).

trM dà la somma degli autovalori, Δ il prodotto.

Il discriminante dell'equazione vale $(trM)^2 - 4 \Delta = \ldots = (a - b)^2 + 4 c^2$ ed è sempre positivo (nullo se a = b e c = 0 a cui corrisponde una forma semidefinita o una matrice nulla).

- $a > 0$, $\Delta > 0$

  I due autovalori hanno segno concorde. Essendo $a b > c^2$, anche a e b hanno lo stesso segno, cioè a > 0, b > 0 e dunque trA > 0. I due autovalori hanno segno concorde e somma positiva, sono quindi entrambi positivi.

- $a < 0$, $\Delta > 0$

  Ragionando come sopra, i due autovalori hanno segno concorde e somma negativa, sono quindi entrambi negativi.

- $\Delta < 0$

  I due autovalori hanno segno discorde concorde.