

### Esercizio 1

La funzione non è derivabile (rispetto ad  $x$ ) nei punti del cerchio che stanno sul segmento verticale  $x = 1$ .

Questa restrizione vale  $g(y) = y^2 - 1$ , che ha massimo 2 assunto nei punti  $(1, \pm\sqrt{3})$ , minimo -1 assunto nel punto  $(1, 0)$ .

Cerchiamo i punti stazionari interni:  $\text{grad}f = (9 \text{sgn}(x-1) - 2x, 2y)$  è nullo nei punti  $(\pm 9/2, 0)$  che non sono interni al dominio.

Studio sulla frontiera con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$$L = y^2 + 9|x-1| - x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$9 \text{sgn}(x-1) - 2x + 2\lambda x = 0, \quad 2y(1+\lambda) = 0, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Dalla seconda equazione si deduce  $y = 0$  oppure  $\lambda = -1$ .

Per  $y = 0$  si ottengono i punti  $(2, 0)$  su cui la funzione vale 5 e  $(-2, 0)$  su cui vale 23.

Per  $\lambda = -1$  la prima equazione diventa  $9 \text{sgn}(x-1) - 4x = 0$ ; le soluzioni  $x = \pm 9/4$  non forniscono punti della frontiera (e nemmeno del dominio).

In conclusione, il massimo vale 23 ed è assunto in  $(-2, 0)$ , il minimo -1 assunto in  $(1, 0)$ .

### Esercizio 2

Teorema della divergenza  $\int_V \text{div}F \, dx \, dy \, dz = \int_S F \cdot N \, dS$

$$\text{div}F = 4x$$

Il primo membro dell'uguaglianza diventa:

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} 4x \, dx \, dy \int_{x^2+y^2}^1 dz = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (4x - 4x(x^2+y^2)) \, dx \, dy$$

L'integrale è nullo perché si ha una funzione dispari in  $x$  e un dominio simmetrico in particolare rispetto all'asse  $y$ .

Per il secondo membro dobbiamo calcolare il flusso uscente dal parabolide e dal cerchio di base.

$$\text{Sul parabolide: } z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$\text{Parametrizzazione: } x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = r^2 \quad (\text{con } 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$$

Vettore fondamentale:  $(-2r^2 \cos \vartheta, -2r^2 \sin \vartheta, r)$  (è diretto verso l'interno; dobbiamo cambiare di segno all'integrale di flusso)

$$\text{Campo: } F = (r^2 \cos^2 \vartheta, r^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, r^3 \cos \vartheta)$$

Integrale di flusso :

$$\int_0^1 2r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^3 \vartheta d\vartheta + \int_0^1 2r^4 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta - \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta$$

E' nullo perché nulli sono gli integrali rispetto a  $\vartheta$ .

Sul cerchio :  $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ .

Parametrizzazione :  $x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta, z = 1$  ( con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  )

Vettore fondamentale :  $(0, 0, r)$  ( è diretto correttamente verso l'esterno )

Campo :  $F = (r^2 \cos^2 \vartheta, r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, r \cos \vartheta)$

Integrale di flusso :  $\int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta = 0$

Teorema di Stokes :  $\int_S \text{rot} F \cdot N dS = \oint_{\gamma^+} F \cdot T ds$

Sul parabolide :  $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$ .

Parametrizzazione :  $x = r \cos \vartheta, y = r \sin \vartheta, z = r^2$  ( con  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  )

Vettore fondamentale :  $(-2r^2 \cos \vartheta, -2r^2 \sin \vartheta, r)$  ( è diretto verso l'interno; dobbiamo cambiare di segno all'integrale di flusso )

Campo :  $\text{rot} F = (0, -z, y) = (0, r^2, r \sin \vartheta)$

Integrale di flusso :  $\int_0^1 2r^4 dr \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta - \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta = 0$

Sul bordo :

Parametrizzazione :  $x = \cos \vartheta, y = \sin \vartheta, z = 1$  ( con  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  ) orientamento non corretto

Vettore derivata :  $(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0)$

Campo :  $F = (\cos^2 \vartheta, \sin \vartheta \cos \vartheta, \cos \vartheta)$

Circuitazione :  $-\int_0^{2\pi} (-\sin \vartheta \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta = 0$ .

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile  
4 giugno 2019

**Esame di analisi II; quesiti di probabilità**

**Esercizio 3** Siano  $X$  ed  $Y$  due variabili aleatorie **indipendenti**. tali che  $E[X] = 2$ ,  $Var(X) = 1$  e  $E[Y] = 1$ ,  $Var(Y) = 2$  e si definisca la variabile aleatoria  $U := X - 2Y$ . Calcolare  $E[U]$  e  $Var(U)$ . Assumendo che  $X$  ed  $Y$  seguano entrambe una legge normale, calcolare  $P(|U| > 15/4)$ .

Per le proprietà del valore atteso si ha  $E[U] = E[X - 2Y] = E[X] - 2E[Y] = 0$ . Inoltre dato che  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, si ha

$$Var(X - 2Y) = Var(X) + Var(-2Y) = Var(X) + 4Var(Y) = 9.$$

Se inoltre si sa che  $X$  ed  $Y$  sono normali, segue che anche  $U$  è distribuita secondo una legge normale di media 0 e varianza 9:  $U \sim \mathcal{N}(0, 9)$ . Equivalently  $U = 3Z$  con  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , quindi

$$P(|U| > 15/4) = P(|3Z| > 15/4) = P(|Z| > 5/4) = 2(1 - \Phi(5/4)) \approx 0.106.$$

Il valore numerico finale è calcolato utilizzando le tavole della legge standard.

**Esercizio 4** Due amici lanciano a turno un dado, e vince chi per primo realizza un sei.

- (i) Calcolare la probabilità che una partita consti di almeno 5 lanci
- (ii) Calcolare la probabilità di vittoria del giocatore che lancia per primo
- (iii) Per rendere il gioco più coinvolgente, prima di ogni lancio entrambi i giocatori aggiungono una moneta di 1 euro su un piattino, e chi vince la partita si intasca le puntate accumulate. Determinare il valore atteso del guadagno del giocatore che lancia per primo.

Sia  $X$  la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci di cui consta una partita,  $p = 1/6$  la probabilità di uscita di un 6 in un singolo lancio.

[i] La condizione  $X \geq 5$  si verifica se e solo se nei primi 4 lanci non esce mai un 6, quindi

$$P(X \geq 5) = (1 - p)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.48$$

[ii] Se definiamo l'evento  $A :=$  "vittoria del primo giocatore", si avrà

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1 - p)^{2k} = \frac{p}{1 - (1 - p)^2} = \frac{6}{11}.$$

[iii] Il guadagno  $U$  del primo giocatore è la differenza tra la somma che si intasca e quella che ha puntato nel frattempo: perde tutto ciò che ha puntato se la partita si consta di un numero pari di lanci, mentre se la partita consta di un numero dispari di lanci, oltre a riprendersi le proprie puntate si intasca tutte quelle del secondo giocatore. Il guadagno netto quindi sarà  $U = k(-1)^{k-1}$  se  $X = k$ , ed il valore atteso di tale funzione di guadagno è

$$\begin{aligned} E[U] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(-1)^{k-1} P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(-1)^{k-1} p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(p - 1)^{k-1} = \frac{p}{(1 - (p - 1))^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'identità  $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ . In definitiva otteniamo  $E[U] = 6/121 \cong 0.05$ : il primo giocatore è leggermente favorito, ma il valore atteso del suo guadagno (al netto delle puntate) è di 5 cent a partita.