Soluzioni

1. Calcolo del flusso del rotore attraverso la superficie

$$S: \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases} \qquad r \in [0,1],\ \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi_r \times \varphi_\theta = (-r, 0, r)$$

$$\operatorname{rot} F = (0, -z, -y) = (0, -1 - r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta)$$

$$\text{Flusso}: \int_0^1 -r^2\,dr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0$$

Calcolo della circuitazione lungo il bordo

$$\gamma: \begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \\ z = 1 + \cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$$

$$F(\gamma(t)) = (\operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta), (1+\cos\theta)^2)$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\left(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta(1+\cos\theta) - (1+\cos\theta)^2\right) d\theta = 0$$

(basta porre $\cos\theta = t$)

2.

(i) Poiché $f(x,0,0) = x + \lg x^2$, $f(1,0,z) = 1 + z - \lg(1+z^2)$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0,0) = +\infty \qquad \lim_{z\to-\infty} f(1,0,z) = -\infty$$

Questo prova che la funzione non è limitata: $\sup_A f = +\infty$, $\inf_A f = -\infty$

(ii) La funzione è di classe $C^\infty(A)$ ed A è un aperto di $\mathbb{R}^3$ (è lo spazio privato dell'asse z).

Cerchiamo i punti stazionari:

$$\operatorname{grad} f = \left(1 + \frac{2x}{x^2+y^2},\ 1 + \frac{2y}{x^2+y^2},\ 1 - \frac{2z}{1+z^2}\right)$$

È inutile proseguire perché $\frac{\partial f}{\partial z} > 0$ (eccetto sul piano $z=1$ dove si annulla). Questo prova che su ogni retta parallela all'asse z in A la funzione è crescente e quindi non può avere punti di massimo o minimo.

[Se volessimo portare avanti i calcoli, troveremmo:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 \\ x^2+y^2+2y=0 \\ (z-1)^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ 2x^2+2x=0 \\ z=1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} P=(0,0,1) \notin A \\ P=(-1,-1,1) \in A \end{array}$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(z^2-1)}{(1+z^2)^2} \end{pmatrix}$$

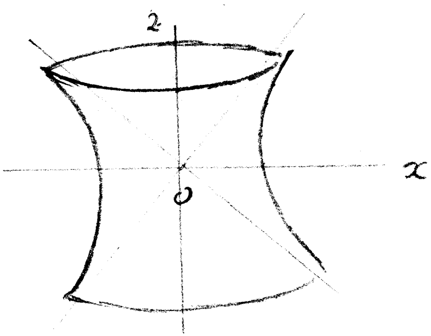
$$\mathcal{H}(-1,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

polinomio caratteristico $-\lambda(\lambda^2-1)$, autovalori $\lambda=0$, $\lambda=\pm1$

l'unico punto stazionario non è né di massimo né di minimo.]

(iii) B è una superficie dotata di bordo (iperboloide circolare di rotazione attorno all'asse z, compreso tra i piani $z=\pm\sqrt{3}$). In particolare B è un compatto e f è continua in tutti i suoi punti: quindi per Weierstrass esistono massimo e minimo di f in B.

Osserviamo che su B si ha $f(x,y,z) = x+y+z$.



Studiamo il comportamento sulla superficie privata di bordo utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L} = x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z^2-1)$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x = y \\ x = -z \\ x^2 = 1 \\ \lambda = -1/2x \end{array} \iff \pm(1, 1, -1; -\tfrac{1}{2})$$

$$P_1 = (1, 1, -1) \qquad f(P_1) = 1$$
$$P_2 = (-1, -1, 1) \qquad f(P_2) = -1$$

Il bordo di B è dato dalle due circonferenze $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$, che parametrizziamo nel modo consueto:

γ: $x = 2\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$, $z = \pm\sqrt{3}$ $\quad (\theta \in [0, 2\pi])$

Dunque $f(\gamma(\theta)) = 2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \pm \sqrt{3}$

$f'(\gamma(\theta)) = 2(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) = 0$ per $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{5}{4}\pi$.

Si ottengono così i punti $P_{3,4} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pm\sqrt{3})$, $P_{5,6}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \pm\sqrt{3})$, per i quali si ha $f(P_{3,4}) = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$, $f(P_{5,6}) = -2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$. Confrontando con i valori trovati precedentemente, si ottiene

$$\max_B f = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}, \qquad \min_B f = -2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$