1.

- Il solido V è l'intersezione del cono $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$ con la sfera $x^2+y^2+z^2 \le 8$.
Si può rappresentare come dominio normale rispetto all'asse z nella forma

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{8-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \le 4 . \end{cases}$$

Il suo volume è dunque dato da:

$$\mathcal{V} = \iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dz = \iint_{x^2+y^2\le 4} \left(\sqrt{8-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy$$

Passando a coordinate polari:

$$\mathcal{V} = 2\pi \int_0^2 \left(r\sqrt{8-r^2} - r^2 \right) dr = \frac{32}{3} (\sqrt{2}-1)\pi$$

(per integrare $r\sqrt{8-r^2}$, si pone $8-r^2 = t$, $r\,dr = -\frac{1}{2}\,dt$)

In maniera alternativa, invece delle coordinate cartesiane possiamo usare le coordinate sferiche. Con questa scelta il solido V può essere espresso nella forma

$$0 \le r \le 2\sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

Ricordando che la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate ha determinante $r^2 \sin\varphi$, il calcolo del volume diventa:

$$\mathcal{V} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} r^2\,dr = \frac{32}{3} (\sqrt{2}-1)\pi.$$

- La superficie che delimita V è unione della superficie conica

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \le 4$$

con la calotta sferica

$$z = \sqrt{8-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2 \le 4 .$$

Usando le coordinate cartesiane come parametri, per l'area della superficie conica si ottiene:

$$x = u,\ y = v,\ z = \sqrt{u^2+v^2} \qquad \text{con } u^2+v^2 \le 4$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & u/\sqrt{u^2+v^2} \\ 0 & 1 & v/\sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{2} \iint_{u^2+v^2\le 4} du\,dv = 4\sqrt{2}\,\pi$$

Per la calotta sferica:

$$x = u,\ y = v,\ z = \sqrt{8-u^2-v^2} \quad \text{con } u^2+v^2 \le 4$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -u/\sqrt{8-u^2-v^2} \\ 0 & 1 & -v/\sqrt{8-u^2-v^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{8-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{8-u^2-v^2}}, 1 \right)$$

$$\| \varphi_u \times \varphi_v \| = 2\sqrt{2} / \sqrt{8-u^2-v^2}$$

$$A = 2\sqrt{2} \iint_{u^2+v^2\le 4} \frac{du\,dv}{\sqrt{8-u^2-v^2}} \underset{\text{(coord. polari)}}{=} 4\sqrt{2}\pi \int_0^2 \frac{r}{\sqrt{8-r^2}}\,dr \underset{\substack{8-r^2=t \\ r\,dr=-\frac{1}{2}dt}}{=} 2\sqrt{2}\pi \int_4^8 \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= 8\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1).$$

Anche in questo caso si possono usare in alternativa le coordinate sferiche.

Per la calotta sferica:

$$x = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta,\quad y = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta,\quad z = 2\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\varphi \in [0, \pi/4],\quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi_\varphi = 2\sqrt{2}(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\theta, \cos\varphi\cos\theta, -\mathrm{sen}\varphi)$$

$$\varphi_\theta = 2\sqrt{2}(-\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta, \mathrm{sen}\varphi\cos\theta, 0)$$

$$\|\varphi_\varphi \times \varphi_\theta\| = 8\,\mathrm{sen}\varphi$$

$$A = 8 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\varphi\,d\varphi = 8\pi(2-\sqrt{2})$$

Per il cono:

$$x = u\cos\theta,\quad y = u\,\mathrm{sen}\theta,\quad z = u \qquad u \in [0,2],\ \theta \in [0,2\pi]$$

$$\varphi_u = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta, 1)$$

$$\varphi_\theta = (-u\,\mathrm{sen}\theta, u\cos\theta, 0)$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_\theta\| = \sqrt{2}\,u$$

$$A = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 u\,du = 4\sqrt{2}\pi$$

- Per il teorema della divergenza, il flusso del campo F uscente da V è uguale all'integrale della divergenza di F. Ma div F = 1 e dunque il flusso è uguale al volume di V, che abbiamo già calcolato.

2.

- Poiché $f(x,0) = (x^2+x)e^x$, $f(0,y) = (y-y^2)e^y$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty \qquad \lim_{y\to+\infty} f(0,y) = -\infty.$$

Dunque $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.

- $\operatorname{grad} f = \left((x^2+3x-y^2+y+1)e^{x+y},\ (x^2+x-y^2-y+1)e^{x+y} \right)$

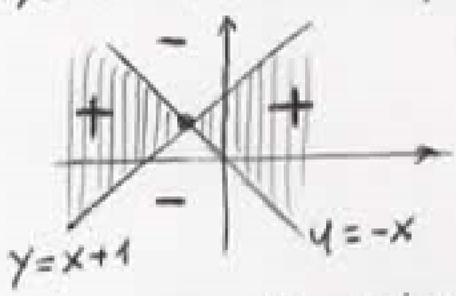
I punti stazionari sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2+3x-y^2+y+1=0 \\ x^2+x-y^2-y+1=0. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\begin{cases} y=-x \\ 2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad P=\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ è l'unico punto stazionario.}$$

Scritta la fz. nella forma $f(x,y) = (x+y)(x-y+1)e^{x+y}$, è facile studiarne il segno (Vedi figura). Il punto P è l'intersezione delle due rette; ogni suo intorno contiene punti di positività e punti di negatività: P è di sella.



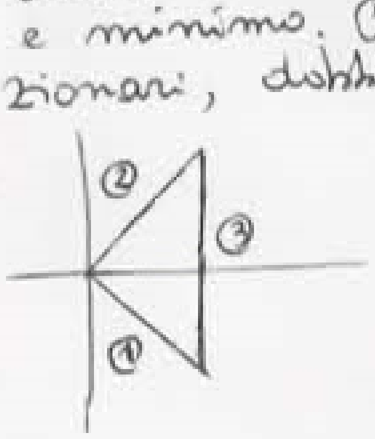
Con un procedimento più lungo, possiamo calcolare la matrice hessiana. Nel punto P è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (non riportiamo i calcoli): i suoi autovalori hanno segno opposto e questo assicura che P è di sella.

- Posto $F(x,y) = f(x,y) - 2e^2$, si ha:

$F(1,1) = 0 \qquad F_x(1,1) = f_x(1,1) = 5e^2 \qquad F_y(1,1) = f_y(1,1) = e^2.$

Poiché $F_y(1,1) \neq 0$, la linea di livello data è grafico di una ed una sola funzione $\varphi(x)$ definita in un intorno di $x_0 = 1$. L'equazione della retta tangente è $\operatorname{grad} f(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 0$, cioè $5x + y = 6$.

- L'insieme dato è il triangolo di vertici $(1,1), (0,0), (1,-1)$. Per il teorema di Weierstrass la funzione vi assume massimo e minimo. Poiché all'interno del dominio non ci sono punti stazionari, dobbiamo esaminarne il comportamento sul bordo.



① $y=-x$, $0 \le x \le 1$
$g(x) = 0$

② $y = x$, $0 \le x \le 1$
$g(x) = 2x e^{2x}$
$g'(x) > 0$ $\quad \max = 2e^2$ in $(1,1)$
$\min = 0$ in $(0,0)$

③ $x=1$ $\quad -1 \le y \le 1$
$g(y) = (2+y-y^2)e^{y+1}$
$g'(y) = (3-y-y^2)e^{y+1} = 0$ per $y = (-1 \pm \sqrt{13})/2 \notin [-1,1]$
$\min = 0$, $\max = 2e^2$

$\min f = 0$ nei punti del segmento ①
$\max f = 2e^2$ nel punto $(1,1)$