Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
18 settembre 2019

Esame di analisi II; quesiti 3 e 4.

Esercizio 3 Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{k^2}.$$

Dire se la convergenza è anche uniforme.

Possiamo calcolare il raggio di convergenza di questa serie utilizzando il criterio del rapporto:

$$L = \lim_{k\to+\infty} \frac{c_k}{c_{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2} \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} \frac{4k+2}{k+1} = 4$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie è $R = 1/L = 1/4$.

Osserviamo ora che $\binom{2k}{k} \leq (1+1)^{2k}$, pertanto, se $|x| \leq 1/4$ abbiamo

$$\left| \binom{2k}{k} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Da ciò deduciamo che la serie è totalmente convergente per $|x| \leq 1/4$, quindi anche uniformemente convergente.

Esercizio 4 La quantità di succo ottenuto spremendo un'arancia di un certo lotto è descritto da una variabile aleatoria di valore atteso $\mu = 50ml$ e deviazione standard $\sigma = 10ml$. Stimare la probabilità che spremendo 49 di queste arance si ottenga più di $2500ml$ di succo.

Chiamate $X_1, ..., X_{49}$ le variabili aleatorie che modellizzano il succo ottenuto spremendo ciascuna arancia, la quantit'à totale di succo ottenuta è modellizzata dalla variabile aleatoria $S = X_1 + ... + X_{49}$ e si ha che

$$E[S] = 2450, \qquad Var(S) = 49 \cdot (10)^2 = 4900.$$

Per il teorema del limite centrale possiamo assumere che S segua una legge normale, ovvero $S = \sigma Z + \mu$ con Z una variabile normale standard, $\mu = 2450$ e $\sigma^2 = 4900$. Pertanto avremo che

$$P(S \geq 2500) = P(70 \cdot Z + 2450 \geq 2500) = P(Z \geq \frac{5}{7}) = P(Z \geq 0.71) = 1 - 0.76 = 0.24.$$