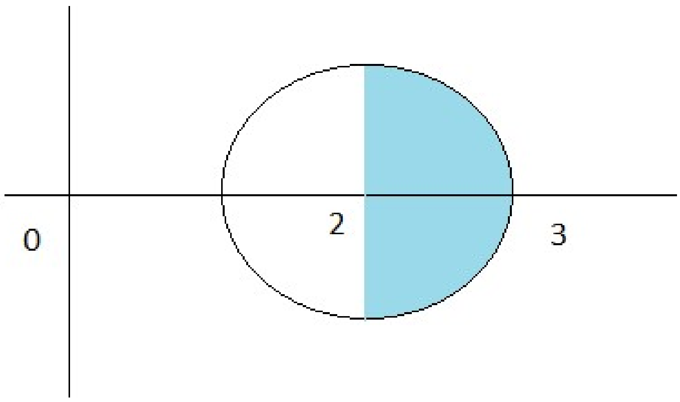
Soluzioni **[A]**

1. Civili VP , Edili (Edili : solo l'area)

Il dominio del piano xz definito dalle condizioni $(x-2)^2 + z^2 \le 1$, $x \ge 2$ ruota attorno all'asse delle z. Descrivere il solido così ottenuto, calcolarne il volume e l'area della superficie che lo delimita.

La rotazione del semicerchio genera la metà di un toro o ciambella.



Per quanto riguarda il volume, possiamo limitarci a considerare il quarto di cerchio con $x \ge 2$ e $z \ge 0$ (genera metà del solido richiesto). Poiché la circonferenza superiore ha equazione $z = \sqrt{1-(x-2)^2}$ con $2 \le x \le 3$, utilizzando le coordinate cilindriche si trova :

$$\frac{V}{2} = 2\pi \int_2^3 x\sqrt{1-(x-2)^2} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-t^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(Nel primo integrale abbiamo posto $x - 2 = t$; il secondo integrale rappresenta l'area di un quarto di cerchio di raggio 1).

Per quanto riguarda la superficie che costituisce la frontiera del solido generato, questa è formata (i) dalla superficie laterale di un cilindro circolare di altezza 2 (il diametro del semicerchio che ruota) e raggio di base 2 (la distanza del centro dall'origine); la sua area è dunque 8π.

(ii) dalla superficie generata dalla semicirconferenza ; una sua parametrizzazione è data da

$x = (2 + \cos\vartheta)\,\mathrm{sen}\varphi$, $y = (2 + \cos\vartheta)\cos\varphi$, $z = \mathrm{sen}\vartheta$

$-\pi/2 \le \vartheta \le 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Essendo $\| \Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi \| = 2+\cos\vartheta$ (non riportiamo il calcolo che non presenta alcuna difficoltà), l'area della superficie è data da $S = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+\cos\vartheta)\, d\vartheta = 4\pi(\pi+1)$.

2. Civili NP, Civili VP, Edili

Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^2, y^2, 1 - z)$, trovarne il flusso attraverso la superficie definita dalle condizioni $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, orientata dalla normale rivolta verso l'esterno, (i) con calcolo diretto , (ii) utilizzando opportunamente il teorema della divergenza.

Parametrizziamo la porzione di paraboloide nella forma $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$, con $u^2 + v^2 \le 1$.

Essendo $\Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1)$, la normale è rivolta verso l'interno, contrariamente a quanto richiesto : dobbiamo dunque cambiare di segno nel calcolo del flusso.

$$F = -\iint_D (u^2, v^2, 1-u^2-v^2)\cdot(-2u, -2v, 1)\, du\, dv = = \iint_D (2u^3 + 2v^3 + u^2 + v^2 - 1)\, du\, dv =$$

$$= \iint_D (u^2+v^2)\, du\, dv - \pi = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 r^3\, dr - \pi = -\pi/2 .$$

(gli integrali di u^3 e di v^3 si annullano perché funzioni dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine; la stessa osservazione vale anche in seguiti quando integreremo le funzioni x e y anche in questo caso in un dominio simmetrico).

L'integrale triplo della divergenza del campo è uguale alla somma del flusso richiesto con quello uscente attraverso il cerchio che delimita superiormente il solido (tappo del paraboloide).

Sul tappo il versore normale è diretto secondo l'asse z e il campo ha la terza componente nulla; dunque il flusso corrispondente è nullo.

Quindi l'integrale della divergenza fornisce il flusso richiesto.

Essendo il dominio V descritto dalle condizioni $x^2 + y^2 \le z \le 1$ e poiché è div $F = 2x + 2y - 1$, si ha :

$$\iiint_V (2x+2y-1)\, dx\, dy\, dz = -\iiint_V dx\, dy\, dz = -\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2-1)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 r^3\, dr - \pi = -\pi/2 .$$

3. Civili NP, Civili VP, Edili

Data la funzione $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ *:*

- *trovare (se esistono) i punti di massimo o minimo locale o assoluto*
- *calcolare massimo e minimo sull'insieme* $x^2 + y^2 = z^2$ *,* $0 \le z \le 1$*, dopo averne provato l'esistenza.*

Essendo grad $f = (y + z, x + z, x + y)$, l'origine risulta unico punto stazionario. Questo non è né di massimo né di minimo, ad esempio perché, restringendo f al piano $z = 0$, si ottiene la funzione xy che nell'origine ha un punto di sella. Un altro modo per ritrovare il risultato è quello di osservare che la matrice hessiana ha autovalori di segno opposto (non riportiamo il calcolo che non presenta difficoltà).

Il problema di massimo e minimo vincolati alla superficie (che è una porzione di cono) si riduce a studiare la funzione

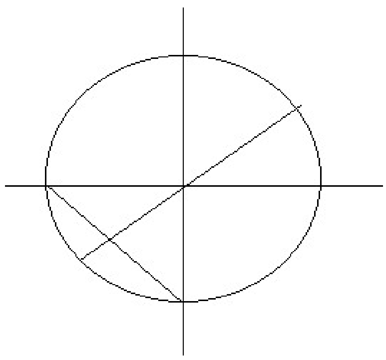
$$g(x, y) = xy + \sqrt{x^2 + y^2}\,(x + y)$$

nel cerchio $x^2 + y^2 \le 1$.

Il punto stazionario (0 , 0) non è né di massimo né di minimo (analoga motivazione a quella data prima).

Sulla frontiera , riscrivendo la funzione in coordinate polari, si ottiene $h(\vartheta) = \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta$.

Essendo $h'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta + 1)$, i punti stazionari sono visualizzati in figura:



$h(0) = h(2\pi) = 1$, $h(\pi/4) = ½ + \sqrt{2}$, $h(5\pi/4) = ½ - \sqrt{2}$, $h(\pi) = -1$, $h(3\pi/2) = -1$

Il massimo è dunque $½ + \sqrt{2}$, il minimo -1.

4. Civili NP, Civili VP, Edili

Data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,x^n}{n + x^{2n}}$ *,* $x \ge 0$

- *provare che converge puntualmente in* $[0, +\infty) - \{1\}$
- *provare che converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo della forma* $[0, a]$ *con* $0 < a < 1$ *o della forma* $[1 + a, +\infty)$ *con* $a > 0$

- *provare che la convergenza non è uniforme in [0 , +∞) - { 1 } facendo vedere che in questo insieme* $\lim_{n\to+\infty} \| f_n \| \neq 0$*.*

Per x = 0 si ottiene la serie nulla.
Per x = 1 $f_n(x) \approx 1/\sqrt{n}$, che fornisce una serie divergente.
Per 0 < x < 1 $f_n(x) \approx x^n/\sqrt{n}$, che fornisce una serie convergente (ad es. usando il criterio del rapporto o della radice).
Per x > 1 $f_n(x) \approx \sqrt{n}/x^n$, che fornisce una serie convergente (ad es. usando il criterio del rapporto o della radice).

Le funzioni f_n hanno punto di massimo per $x = n^{1/(2n)}$, a cui corrisponde il valore ½. Poiché $\| f_n \|$ non è infinitesima, la convergenza nel dominio di convergenza puntuale non è uniforme.

Negli intervalli [0 , a] e [1+a , +∞) i punti di massimo sono rispettivamente a e 1 + a (almeno definitivamente, dato che $n^{1/n} \to 1$) . Nel primo caso si ha $\| f_n \| = \sqrt{n}\, a^n / (n + a^{2n}) \approx a^n/\sqrt{n}$, nel secondo caso si ha invece $\| f_n \| = \sqrt{n}\,(1+a)^n / (n + (1+a)^{2n}) \approx \sqrt{n}/(1+a)^n$; in entrambi i casi si ottengono due serie convergenti (come già detto sopra). Questo prova la convergenza totale (e quindi uniforme) nei due tipi di intervalli.

5. Civili NP

Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti tali che

E [X] = 2 , Var (X) = 3
E [Y] = -1 , Var (Y) = 1.

- *Calcolare media e varianza della variabile aleatoria X – Y.*
- *Supponendo X ed Y distribuite entrambe in modo gaussiano, calcolare P (0 ≤ X – Y ≤ 1).*

Grazie alla linearità della media si ha che $E[X-Y] = E[X] - E[Y] = 3$; inoltre dato che X ed Y sono indipendenti $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(-Y) = 4$ (abbiamo anche usato che $\mathrm{Var}(-Y) = \mathrm{Var}(Y)$).

Dalla teoria sappiamo che la somma (o la differenza) di variabili gaussiane è a sua volta gaussiana, quindi detta $Z := (X - Y - 3)/2$ è una variabile normale standard e quindi

$$P(0 \le X - Y \le 1) = P(-3/2 \le Z \le -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3/2}^{-1} e^{-t^2/2} dt$$

Di conseguenza, ponendo $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ e ricordando che $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ otteniamo

$$P(0 \le X - Y \le 1) = \Phi(-1) - \Phi(-3/2) = \Phi(3/2) - \Phi(1) = 0.93319 - 0.84134 = 0.09185$$

Università degli Studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile

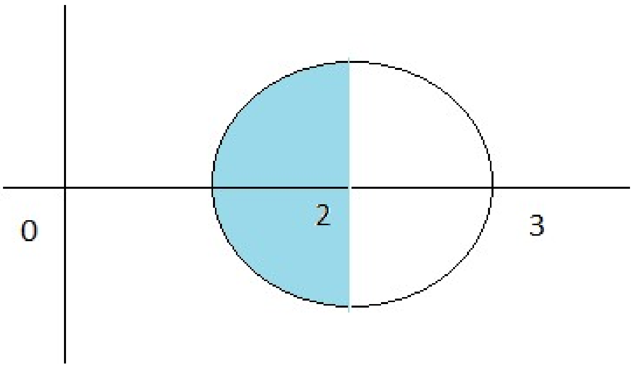
Analisi Matematica II

Prova scritta #7 del 20.2.2018 **[B]**

1. Civili VP , Edili (Edili : solo l'area)

Il dominio del piano xz definito dalle condizioni $(x-2)^2 + z^2 \le 1$, $x \le 2$ *ruota attorno all'asse delle z. Descrivere il solido così ottenuto, calcolarne il volume e l'area della superficie che lo delimita.*

La rotazione del semicerchio genera la metà di un toro o ciambella.



Per quanto riguarda il volume, possiamo limitarci a considerare il quarto di cerchio con $x \le 2$ e $z \ge 0$ (genera metà del solido richiesto). Poiché la circonferenza superiore ha equazione $z = \sqrt{1-(x-2)^2}$ con $1 \le x \le 2$, utilizzando le coordinate cilindriche si trova :

$$\frac{V}{2} = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1-(x-2)^2} = 2\pi \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} = \frac{\pi^2}{2} .$$

(Nel primo integrale abbiamo posto $x - 2 = t$; il secondo integrale rappresenta l'area di un quarto di cerchio di raggio 1).

Per quanto riguarda la superficie che costituisce la frontiera del solido generato, questa è formata (i) dalla superficie laterale di un cilindro circolare di altezza 2 (il diametro del semicerchio che ruota) e raggio di base 2 (la distanza del centro dall'origine); la sua area è dunque 8π.

(ii) dalla superficie generata dalla semicirconferenza ; una sua parametrizzazione è data da

$x = (2 + \cos\vartheta)\,\mathrm{sen}\varphi$, $y = (2 + \cos\vartheta)\cos\varphi$, $z = \mathrm{sen}\vartheta$

$\pi/2 \le \vartheta \le 3\pi/2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Essendo $\| \Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi \| = 2+\cos\vartheta$ (non riportiamo il calcolo che non presenta alcuna difficoltà), l'area della superficie è data da $S = 2\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (2+\cos\vartheta)\, d\vartheta = 4\pi(\pi-1)$.

2. Civili NP, Civili VP, Edili

Dato il campo vettoriale F (x , y , z) = (x^2 , y^2 , 2 – z), trovarne il flusso attraverso la superficie definita dalle condizioni z = $x^2 + y^2$, 0 ≤ z ≤ 2, orientata dalla normale rivolta verso l'esterno, (i) con calcolo diretto , (ii) utilizzando opportunamente il teorema della divergenza.

Parametrizziamo la porzione di paraboloide nella forma x = u , y = v , z = $u^2 + v^2$, con $u^2 + v^2 \le 2$.

Essendo $\Phi_u \times \Phi_v = (-2u, -2v, 1)$, la normale è rivolta verso l'interno, contrariamente a quanto richiesto : dobbiamo dunque cambiare di segno nel calcolo del flusso.

$$F = -\iint_D (u^2, v^2, 2-u^2-v^2)\cdot(-2u,-2v,1)\, du\, dv = \iint_D (2u^3+2v^3+u^2+v^2-2)\, du\, dv =$$

$$= \iint_D (u^2+v^2)\, du\, dv - 4\pi = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr - 4\pi = -2\pi .$$

(gli integrali di u^3 e di v^3 si annullano perché funzioni dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine; la stessa osservazione vale anche in seguiti quando integreremo le funzioni x e y anche in questo caso in un dominio simmetrico).

L'integrale triplo della divergenza del campo è uguale alla somma del flusso richiesto con quello uscente attraverso il cerchio che delimita superiormente il solido (tappo del paraboloide).

Sul tappo il versore normale è diretto secondo l'asse z e il campo ha la terza componente nulla; dunque il flusso corrispondente è nullo.

Quindi l'integrale della divergenza fornisce il flusso richiesto.

Essendo il dominio V descritto dalle condizioni $x^2 + y^2 \le z \le 2$ e poiché è div F = 2 x + 2 y – 1 , si ha :

$$\iiint_V (2x+2y-1)\, dx\, dy\, dz = -\iiint_V dx\, dy\, dz = -\iint_{x^2+y^2\le 2} dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{2} dz = \iint_{x^2+y^2\le 2} (x^2+y^2-2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr - 4\pi = -2\pi .$$

3. Civili NP, Civili VP, Edili

Data la funzione $f(x, y, z) = xy + yz + xz$:

- *trovare (se esistono) i punti di massimo o minimo locale o assoluto*
- *calcolare massimo e minimo sull'insieme $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le 2$, dopo averne provato l'esistenza.*

Essendo grad f = (y + z , x + z , x + y) , l'origine risulta unico punto stazionario. Questo non è né di massimo né di minimo, ad esempio perché, restringendo f al piano z = 0, si ottiene la funzione xy che nell'origine ha un punto di sella. Un altro modo per ritrovare il risultato è quello di osservare che la matrice hessiana ha autovalori di segno opposto (non riportiamo il calcolo che non presenta difficoltà).

Il problema di massimo e minimo vincolati alla superficie (che è una porzione di cono) si riduce a studiare la funzione

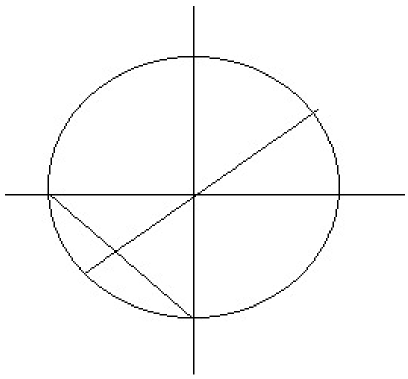
$$g(x, y) = xy + \sqrt{x^2 + y^2}\,(x + y)$$

nel cerchio $x^2 + y^2 \le 4$.

Il punto stazionario (0 , 0) non è né di massimo né di minimo (analoga motivazione a quella data prima).

Sulla frontiera , riscrivendo la funzione in coordinate polari, si ottiene $h(\vartheta) = 4(\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta)$.

Essendo $h'(\vartheta) = (\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta + 1)$, i punti stazionari sono visualizzati nella figura successiva :



$h(0) = h(2\pi) = 4$, $h(\pi/4) = 2 + 4\sqrt{2}$, $h(5\pi/4) = 2 - 4\sqrt{2}$, $h(\pi) = -4$, $h(3\pi/2) = -4$

Il massimo è dunque $2 + 4\sqrt{2}$, il minimo -4.

4. Civili NP, Civili VP, Edili

Data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{n^2 + x^{2n}}$, $x \ge 0$

- *provare che converge puntualmente in $[0, +\infty) - \{1\}$*
- *provare che converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo della forma $[0, a]$ con $0 < a < 1$ o della forma $[1 + a, +\infty)$ con $a > 0$*

- *provare che la convergenza non è uniforme in [0 , +∞) - { 1 } facendo vedere che in questo insieme* $\lim_{n \to +\infty} \| f_n \| \neq 0$.

Per x = 0 si ottiene la serie nulla.
Per x = 1 $f_n(x) \approx 1/n$, che fornisce una serie divergente.
Per 0 < x < 1 $f_n(x) \approx x^n / n$, che fornisce una serie convergente (ad es. usando il criterio del rapporto o della radice).
Per x > 1 $f_n(x) \approx n / x^n$, che fornisce una serie convergente (ad es. usando il criterio del rapporto o della radice).

Le funzioni f_n hanno punto di massimo per $x = n^{1/n}$, a cui corrisponde il valore ½. Poiché $\| f_n \|$ non è infinitesima, la convergenza nel dominio di convergenza puntuale non è uniforme.
Negli intervalli [0 , a] e [1+a , +∞) i punti di massimo sono rispettivamente a e 1 + a (almeno definitivamente, dato che $n^{1/n} \to 1$). Nel primo caso si ha $\| f_n \| = n a^n / (n^2 + a^{2n}) \approx a^n / n$, nel secondo caso si ha invece $\| f_n \| = n(1+a)^n / (n^2 + (1+a)^{2n}) \approx n/(1+a)^n$; in entrambi i casi si ottengono due serie convergenti (come già detto sopra). Questo prova la convergenza totale (e quindi uniforme) nei due tipi di intervalli.

5. Civili NP

Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti tali che

E [X] = 1 , Var (X) = 2

E [Y] = 2 , Var (Y) = 2.

- *Calcolare media e varianza della variabile aleatoria X – Y.*
- *Supponendo X ed Y distribuite entrambe in modo gaussiano, calcolare P (0 ≤ X – Y ≤ 1).*

Grazie alla linearità della media si ha che $E[X-Y] = E[X] - E[Y] = -1$; inoltre dato che X ed Y sono indipendenti $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(-Y) = 4$ (abbiamo anche usato che $\mathrm{Var}(-Y) = \mathrm{Var}(Y)$).

Dalla teoria sappiamo che la somma (o la differenza) di variabili gaussiane è a sua volta gaussiana, quindi $Z := (X - Y + 1)/2$ è una variabile normale standard e

$$P(0 \leq X - Y \leq 1) = P(1/2 \leq Z \leq 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/2}^{1} e^{-t^2/2} dt$$

Di conseguenza, ponendo $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ otteniamo

$$P(0 \leq X - Y \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(1/2) = 0.84134 - 0.69146 = 0.15008$$