Appello #2 - edili [A]

1.

- La successione f_n converge puntualmente alla funzione f (x) in [a , b] se

$$\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n}(x, \varepsilon):\ \forall n > \bar{n},\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- La successione f_n converge uniformemente alla funzione f (x) in [a , b] se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n}(\varepsilon):\ \forall x \in [a, b]\ \ \forall n > \bar{n},\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La definizione di convergenza uniforme si può riscrivere nella forma $\| f_n - f \|_0 \to 0$, ponendo $\| f_n - f \|_0 = \sup | f_n(x) - f(x) |$. Nello spazio C^0 [a , b] possiamo sostituire estremo superiore con massimo (teorema di Weierstrass).

- $\| f \|_1 = \int_a^b | f(x) | \, dx$ definisce una norma nello spazio C^0 [a , b] perché :

(i) $\| f \|_1 \geq 0$

(ii) $\| f \|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Se la funzione è nulla, il suo integrale (cioè la norma) è nullo.

Viceversa, se $\| f \|_1 = 0$ supponiamo che in un punto x_0 sia $| f(x_0) | > 0$; per continuità questo sarebbe vero anche in tutto un intorno del punto e dunque l'integrale non potrebbe essere nullo.

(iii) $\| \lambda f \|_1 = | \lambda | \, \| f \|_1$

(iv) $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$

- $\| f_n \|_1 = 1/n \to 0$, $\| f_n \|_0 = 1$

2.

- La superficie data è un semicilindro circolare tagliato dai piani orizzontali z = 0, z = 1.
- Parametrizziamo la superficie usando le coordinate cilindriche: $x = \cos\vartheta$, $y = \text{sen}\ \vartheta$, $z = z$, con $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq z \leq 1$.

$$\Phi_\vartheta \times \Phi_z = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\,\vartheta, 0) \quad \Phi_\vartheta \times \Phi_z = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\,\vartheta, 0) \text{ area} = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^1 dz = \pi.$$

- Per motivi di simmetria, $x_G = 0$, $z_G = ½$.

$$y_G = \frac{\int_S y\, dS}{\int_S dS} = \frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}\,\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 dz}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

- rot F = $(z - 1 , 0 , - x^2) = (z - 1 , 0 , - \cos^2\vartheta)$ rotF $\cdot\ \Phi_\vartheta \times \Phi_z = (z-1)\cos\vartheta$

$$\text{flusso} = \int_0^1 (z-1)\, dz \int_0^\pi \cos\vartheta\, d\vartheta = 0$$

- Calcoliamo la circuitazione sul bordo della superficie opportunamente orientato: tale bordo si compone di una semicirconferenza orientata in senso antiorario nel piano z = 0, una semicirconferenza orientata in senso orario nel piano z = 1, il segmento da (1,0,0) a (1,0,1) , il segmento da (-1,0,1) a (-1,0,0). Calcoliamo successivamente il lavoro sui quattro tratti.

(i) $x = \cos\vartheta$, $y = \mathrm{sen}\,\vartheta$, $z = 0$

$$L = \int_0^\pi (\cos^2\vartheta\, \mathrm{sen}\,\vartheta, 0, 0) \cdot (-\mathrm{sen}\,\vartheta, \cos\vartheta, 0)\, d\vartheta = -\int_0^\pi \cos^2\vartheta\, \mathrm{sen}^2\vartheta\; d\vartheta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{sen}^2\, 2\vartheta\; d\vartheta = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 t\; dt = -\frac{1}{8}\left[\frac{\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{8}.$$

(ii) $x = \cos\vartheta$, $y = \mathrm{sen}\,\vartheta$, $z = 1$; l'orientamento non è quello richiesto.

$$L = -\int_0^\pi (\cos^2\vartheta\, \mathrm{sen}\,\vartheta, 1, \mathrm{sen}\,\vartheta) \cdot (-\mathrm{sen}\,\vartheta, \cos\vartheta, 0)\, d\vartheta =$$

$$= -\int_0^\pi (-\cos^2\vartheta\, \mathrm{sen}^2\vartheta + \cos\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\pi}{8}.$$

(iii) $x = 1$, $y = 0$, $z = t$

$$L = \int_0^1 (0, t, 0) \cdot (0, 0, 1)\, dt = 0$$

(iv) $x = -1$, $y = 0$, $z = 1 - t$

$$L = \int_0^1 (0, 1-t, 0) \cdot (0, 0, -1)\, dt = 0.$$

3.

Poiché grad f non è mai nullo, massimo e minimo sono assunti sulla frontiera del dominio (la superficie sferica di centro (1 , 1 , 0) e raggio $\sqrt{2}$). Possiamo studiare il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti stazionari della funzione lagrangiana L = y + z + λ ($x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y$) risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ 1 + 2\lambda y - 2\lambda = 0 \\ 1 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda = 0$ oppure x = 1. La soluzione $\lambda = 0$ è incompatibile con la seconda equazione.

Sottraendo membro a membro seconda e terza equazione e ricordando che λ è diverso da 0, si ottiene: y – z = 1; risolvendo il sistema formato da questa equazione e dalla quarta, si trovano i punti

$$(1, 2, 1) \ , \ (1, 0, -1) \ .$$

Il primo è di massimo, il secondo di minimo.

Appello #2 - edili [B]

1.

- La successione f_n converge puntualmente alla funzione f (x) in [a , b] se

  $$\forall x \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n}(x,\varepsilon): \forall n > \bar{n}, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

- La successione f_n converge uniformemente alla funzione f (x) in [a , b] se

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n}(\varepsilon): \forall x \in [a,b] \ \forall n > \bar{n}, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

  La definizione di convergenza uniforme si può riscrivere nella forma $\| f_n - f \|_0 \to 0$, ponendo $\| f_n - f \|_0 = \sup \left| f_n(x) - f(x) \right|$. Nello spazio C^0 [a , b] possiamo sostituire estremo superiore con massimo (teorema di Weierstrass).

- $\| f \|_1 = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$ definisce una norma nello spazio C^0 [a , b] perché :

  (i) $\| f \|_1 \geq 0$

  (ii) $\| f \|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$

  Se la funzione è nulla, il suo integrale (cioè la norma) è nullo.

  Viceversa, se $\| f \|_1 = 0$ supponiamo che in un punto x_0 sia | f (x_0) | > 0; per continuità questo sarebbe vero anche in tutto un intorno del punto e dunque l'integrale non potrebbe essere nullo.

  (iii) $\| \lambda f \|_1 = |\lambda| \, \| f \|_1$

  (iv) $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$

- $\| f_n \|_1 = 1/n \to 0$, $\| f_n \|_0 = 1$

2.

- La superficie data è un semicilindro circolare tagliato dai piani orizzontali z = 0, z = 1.

- Parametrizziamo la superficie usando le coordinate cilindriche: x = cos ϑ, y = sen ϑ, z = z, con $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq 1$.

$$\Phi_\vartheta \times \Phi_z = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 0) \quad \Phi_\vartheta \times \Phi_z = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 0) \qquad \text{area} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 dz = \pi.$$

- Per motivi di simmetria, $y_G = 0$, $z_G = ½$.

$$x_G = \frac{\int_S x\, dS}{\int_S dS} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 dz}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

- rot F = $(-1 , -z , -2xy) = (-1 , -z , -2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta)$ rotF $\cdot\ \Phi_\vartheta \times \Phi_z = -\cos\vartheta - z \operatorname{sen}\vartheta$

$$\text{flusso} = -\int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta - \int_0^1 z\, dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = -2.$$

- Calcoliamo la circuitazione sul bordo della superficie opportunamente orientato: tale bordo si compone di una semicirconferenza orientata in senso antiorario nel piano z = 0, una semicirconferenza orientata in senso orario nel piano z = 1, il segmento da (0,1,0) a (0,1,1) , il segmento da (0,-1,1) a (0,-1,0). Calcoliamo successivamente il lavoro sui quattro tratti.

(i) $x = \cos\vartheta$, $y = \operatorname{sen}\vartheta$, $z = 0$

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta, 0, 0) \cdot (-\operatorname{sen}\vartheta, \cos\vartheta, 0)\, d\vartheta = -\int_0^{\pi} \cos\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta\, d\vartheta = 0$$

(ii) $x = \cos\vartheta$, $y = \operatorname{sen}\vartheta$, $z = 1$; l’orientamento non è quello richiesto.

$$L = - -\int_{\pi/2}^{\pi/2} (\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta, 1, \cos\vartheta) \cdot (-\operatorname{sen}\vartheta, \cos\vartheta, 0)\, d\vartheta =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi/2} (\cos\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta - \cos\vartheta)\, d\vartheta = -2.$$

(iii) $x = 0$, $y = 1$, $z = t$

$$L = \int_0^1 (0, t, 0) \cdot (0, 0, 1)\, dt = 0$$

(iv) $x = 0$, $y = -1$, $z = t$

$$L = \int_0^1 (0, t, 0) \cdot (0, 0, 1)\, dt = 0.$$

3.

Poiché grad f non è mai nullo, massimo e minimo sono assunti sulla frontiera del dominio (la superficie sferica di centro (1 , 1 , 0) e raggio $\sqrt{2}$). Possiamo studiare il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I punti stazionari della funzione lagrangiana L = x + z + λ ($x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y$) risolvono il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ 2\lambda y - 2\lambda = 0 \\ 1 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo λ = 0 oppure y = 1. La soluzione λ = 0 è incompatibile con la prima equazione.

Sottraendo membro a membro prima e terza equazione e ricordando che λ è diverso da 0, si ottiene: x – z = 1; risolvendo il sistema formato da questa equazione e dalla quarta, si trovano i punti

$$(0,1,-1)\ ,\ (2,1,1)\ .$$

Il primo è di minimo, il secondo di massimo.