(A) Una compagnia aerea modellizza il peso (espresso in Kg) del bagaglio a mano di ciascun viaggiatore mediante una variabile aleatoria continua con densità uniforme sull'intervallo [0,10].

1. Calcolare valore atteso e varianza di questa variabile aleatoria.
2. Sapendo che sull'aereo si sono imbarcati 108 passeggeri, dire qual'e' il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria S che descrive il peso totale dei bagagli a mano.
3. Stimare la probabilità $P(S > 600)$

La densità della variabile aleatoria che rappresenta il peso del bagaglio a mano di un singolo passeggero è data da

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & \text{se } x \in [0,10] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto $\boxed{E[X] = \int_0^{10} x\frac{dx}{10} = 5,}$ inoltre visto che $E[X^2] = \int_0^{10} x^2\frac{dx}{10} = \frac{100}{3}$, otteniamo $\boxed{\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{25}{3}}$.

Chiamata X_i la variabile aleatoria che rappresenta il peso del bagaglio a mano dell'i-esimo passeggero ($1 \leq i \leq n$ con $n = 108$) si ha che

$$S := \sum_1^n X_i \quad \text{con} \quad \mu := E[X_i] = 5 \;\; \text{e } \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_i) = \frac{25}{3}$$

e dunque $\boxed{E[S] = n\mu = 540}$ e $\boxed{\mathrm{Var}(S) = n\sigma^2 = 900}$. (oss: stiamo assumendo che i pesi dei bagagli dei vari passeggeri siano variabili aleatorie indipendenti).

Grazie al teorema del limite centrale sappiamo che normalizzando la variabile aleatoria S otteniamo una variabile aleatoria $S^* := \frac{S-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ che segue approssimativamente una legge normale standard. Pertanto $P(S > 600) = P(S^* > \delta)$ con $\delta := \frac{600-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = 2$, e dunque $P(S > 600) = P(S^* > \delta) = 1 - P(S^* \leq \delta) = 1 - \Phi(2)$ dove

$$\Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}dx.$$

Usando la tavola della funzione di ripartizione della legge normale standard otteniamo che $\Phi(2) = 0.97725$, di conseguenza $\boxed{P(S > 600) = 0.02275}$.

(B) Una compagnia aerea modellizza il peso (espresso in Kg) del bagaglio a mano di ciascun viaggiatore mediante una variabile aleatoria continua con densita' uniforme sull'intervallo [0,8].

1. Calcolare valore atteso e varianza di questa variabile aleatoria.
2. Sapendo che sull'aereo si sono imbarcati 75 passeggeri, dire qual'è il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria S che descrive il peso totale dei bagagli a mano.
3. Stimare la probabilità $P(S < 250)$

La densità della variabile aleatoria che rappresenta il peso del bagaglio a mano di un singolo passeggero è data da

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{se } x \in [0,8] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto $\boxed{E[X] = \int_0^8 x \frac{dx}{8} = 4,}$ inoltre visto che $E[X^2] = \int_0^8 x^2 \frac{dx}{8} = \frac{64}{3}$, otteniamo $\boxed{\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{16}{3}}$.

Chiamata X_i la variabile aleatoria che rappresenta il peso del bagaglio a mano dell'i-esimo passeggero ($1 \leq i \leq n$ con $n = 75$) si ha che

$$S := \sum_1^n X_i \qquad \text{con } \mu := E[X_i] = 4 \text{ e } \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_i) = \frac{16}{3}$$

e dunque $\boxed{E[S] = n\mu = 300}$ e $\boxed{\mathrm{Var}(S) = n\sigma^2 = 400}$. (oss: stiamo assumendo che i pesi dei bagagli dei vari passeggeri siano variabili aleatorie indipendenti).

Grazie al teorema del limite centrale sappiamo che normalizzando la variabile aleatoria S otteniamo una variabile aleatoria $S^* := \frac{S-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ che segue approssimativamente una legge normale standard. Pertanto $P(S < 250) = P(S^* < -\delta)$ con $\delta := -\frac{250-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = 2.5$, e dunque $P(S < 250) = P(S^* < -\delta) = 1 - P(S^* \leq \delta) = 1 - \Phi(2.5)$ dove

$$\Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

Usando la tavola della funzione di ripartizione della legge normale standard otteniamo che $\Phi(2.5 = 0.99379)$, quindi $\boxed{P(S < 250) = 0.00621}$.