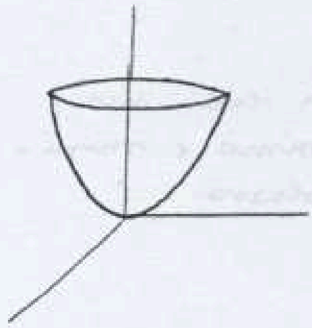
Soluzioni

1. 

. Calcolo del flusso usando il teorema della divergenza.

$\operatorname{div} F = 2x + 2y + 1$

$V: \quad x^2+y^2 \le z \le 1, \quad x^2+y^2 \le 1$

$$\mathcal{F} = \iint_{x^2+y^2\le 1} (2x+2y+1)\, dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)(2x+2y+1)\, dx\, dy$$

(gli integrali delle fz. - dispari rispetto a x o a y - sono nulli)

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\, dx\, dy = \pi - 2\pi \int_0^1 r^3\, dr = \frac{\pi}{2}$$

. Calcolo diretto

- Flusso attraverso la base superiore

$S: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad F|_S = (r^2\cos^2\theta,\ r^2\mathrm{sen}^2\theta,\ 1)$

$\phi_r \times \phi_\theta = (0,0,r)$ diretto verso l'alto, come vogliamo sia

$0 \le r \le 1$
$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\mathcal{F}_1 = 2\pi \int_0^1 r\, dr = \pi$$

- Flusso attraverso il paraboloide

$S: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r^2 \end{cases}$ $\quad F|_S = (r^2\cos^2\theta,\ r^2\mathrm{sen}^2\theta,\ r^2)$

$\phi_r \times \phi_\theta = (-2r^2\cos\theta,\ -2r^2\mathrm{sen}\,\theta,\ r)$ diretto verso l'interno; dobbiamo cambiare segno.

$0 \le r \le 1$
$0 \le \theta \le 2\pi$

$$\mathcal{F}_2 = \cancel{\int_0^1 2r^4\, dr \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta} + \cancel{\int_0^1 2r^4\, dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^3\theta\, d\theta} - 2\pi \int_0^1 r^3\, dr = -\frac{\pi}{2}.$$

2. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+y^2-2x = 0 \end{cases}$ $\quad J = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-2 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

$\nabla f \times \nabla g = (2x, 2y, 2z) \times (2x-2, 2y, 0) = (-4yz,\ 4xz-4z,\ 4y)$

nullo se: $\begin{cases} yz = 0 \\ (x-1)z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ nessuna sol. sulla curva, cioè nessun punto singolare

La curva γ è l'intersezione tra una sfera e un cilindro: è un insieme chiuso e limitato e dunque ha massima e minima distanza dall'asse z per il teorema di Weierstrass.
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L} = x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x^2+y^2-2x)$$

$$\begin{cases} 2x+2\lambda x+2\mu x-2\mu=0 \\ 2y+2\lambda y+2\mu y=0 \\ 2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+\lambda x+\mu x-\mu=0 \\ y(1+\lambda+\mu)=0 \\ \lambda z=0 \quad (*) \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$$

Dalla $(*)$:

(A) $\begin{cases} \lambda=0 \\ x(1+\mu)=\mu \\ y(1+\mu)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases} \rightarrow$ μ non può essere -1 perché non soddisfa l'eq. precedente $\quad \begin{cases} \lambda=0 \\ y=0 \\ x=0 \quad \text{opp.} \quad x=2 \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ z=\pm1 \qquad \text{imposs.} \end{cases}$

$(0,0,\pm1)$: in questi punti la distanza vale 0; sono i punti di minimo.

(B)

$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x \end{cases} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$: la distanza vale 1; sono i punti di massimo.

3. Polinomio caratteristico: $R^2+2R+1=0 \iff R=-1$

$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ soluz. eq. omogenea

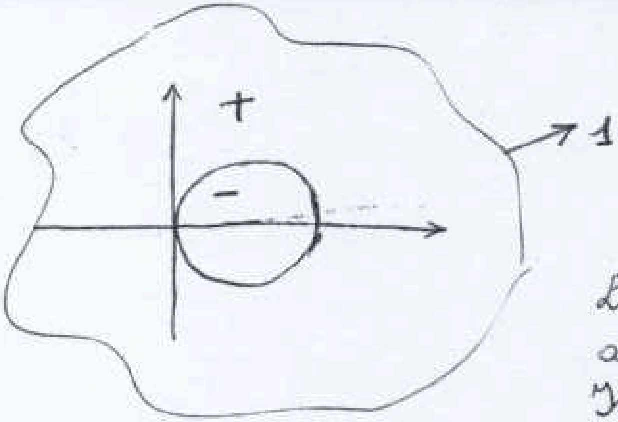
soluzione particolare: $c_1(x)e^{-x}+c_2(x)xe^{-x}$;

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \frac{e^{-x}}{x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{pmatrix}} = -1 \rightarrow c_1(x)=-x$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}/x \end{pmatrix}}{''} = \frac{1}{x} \rightarrow c_2(x) = \lg x$$

$$\bar{y}(x) = e^{-x}x(\lg x-1)$$

4.



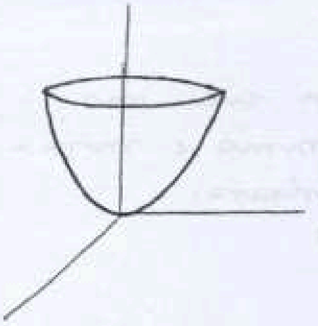
$$f(r,\theta) = \frac{r^2 - 4r\cos\theta}{r^2+1} \to 1 \quad \text{per } r \to \infty$$

La fz. (continua) ha minimo assoluto all'interno del cerchio. Inoltre $f(x,y) > 1$ se $x < \frac{1}{4}$, dunque ha anche massimo.

$$\nabla f = \left(\frac{4x^2 - 4y^2 + 2x - 4}{(x^2+y^2+1)^2} \, , \, \frac{2(1+4x)y}{(x^2+y^2+1)^2} \right)$$

Punti stazionari: $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}, 0 \right)$ che sono i punti di massimo (segno $-$) e di minimo (segno $+$).

Soluzioni

1. 

· Calcolo del flusso usando il teorema della divergenza.

$\operatorname{div} F = 2x + 2y + 1$

$V: \quad x^2+y^2 \le z \le 4, \quad x^2+y^2 \le 4$

$$\mathcal{F} = \iint_{x^2+y^2\le 4} (2x+2y+1)\, dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{4} dz = \iint_{x^2+y^2\le 4} (4-x^2-y^2)(2x+2y+1)\, dx\, dy$$

(gli integrali delle fz. dispari rispetto a x o a y sono nulli)

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (4-x^2-y^2)\, dx\, dy = 16\pi - 2\pi \int_0^2 r^3\, dr = 8\pi$$

· Calcolo diretto

- Flusso attraverso la base superiore

$S: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = 4 \end{cases}$ $\quad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$F|_S = (r^2\cos^2\theta,\ r^2 \operatorname{sen}^2\theta,\ 4)$

$\phi_r \times \phi_\theta = (0, 0, r)$ diretto verso l'alto, come vogliamo sia

$$\mathcal{F}_1 = 2\pi \int_0^2 4r\, dr = 16\pi$$

- Flusso attraverso il paraboloide

$S: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = r^2 \end{cases}$ $\quad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$F|_S = (r^2\cos^2\theta,\ r^2\operatorname{sen}^2\theta,\ r^2)$

$\phi_r \times \phi_\theta = (-2r^2\cos\theta,\ -2r^2\operatorname{sen}\theta,\ r)$ diretto verso l'interno; dobbiamo cambiare segno.

$$\mathcal{F}_2 = \int_0^2 2r^4\, dr \cancel{\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta} + \int_0^2 2r^4\, dr \cancel{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta} - 2\pi \int_0^2 r^3\, dr = -8\pi.$$

2. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x^2+y^2-2x = 0 \end{cases}$ $\quad J = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-2 & 0 \end{pmatrix}$

$\nabla f \times \nabla g = (2x, 2y, 2z) \times (2x, 2y-2, 0) = (-4yz,\ 4xz - 4z,\ 4y)$

nullo se: $\begin{cases} (y-1)z = 0 \\ xz = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ nessuna sl. sulla curva, cioè nessun punto singolare

La curva γ è l'intersezione tra una sfera e un cilindro: è un insieme chiuso e limitato e dunque ha massima e minima distanza dall'asse z per il teorema di Weierstrass.
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L} = x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x^2+y^2-2y)$$

$$\begin{cases} 2y+2\lambda y+2\mu y-2\mu=0 \\ 2x+2\lambda x+2\mu x=0 \\ 2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+\lambda y+\mu y-\mu=0 \\ x(1+\lambda+\mu)=0 \\ \lambda z=0 \quad (*) \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$$

Dalla $(*)$:

(A) $\begin{cases} \lambda=0 \\ y(1+\mu)=\mu \\ x(1+\mu)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \rightarrow$ μ non può essere -1 perché non soddisfa l'eq. precedente $\begin{cases} \lambda=0 \\ x=0 \\ y=0 \text{ opp. } y=2 \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ z=\pm1 \qquad \text{imposs.} \end{cases}$

$(0,0,\pm1)$: in questi punti la distanza vale 0; sono i punti di minimo.

(B)
$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2y \end{cases} \rightarrow \left(\pm\frac{\sqrt3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$: la distanza vale 1; sono i punti di massimo.

3. Polinomio caratteristico: $R^2-2R+1=0 \iff R=1$

$y_0(x)=c_1e^x+c_2xe^x$ soluz. eq. omogenea

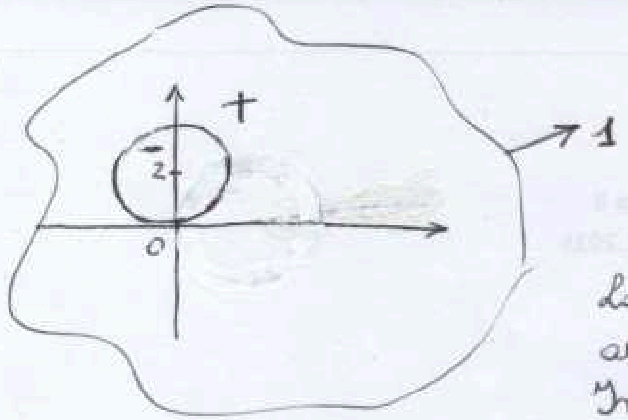
soluzione particolare: $c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x$;

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x+xe^x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{pmatrix}} = -1 \rightarrow c_1(x)=-x$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{pmatrix}}{\quad} = \frac{1}{x} \rightarrow c_2(x)=\lg x$$

$$\bar{y}(x)=e^x x(\lg x-1)$$

4.



$$f(r,\theta) = \frac{r^2 - 4r \quad \theta}{r^2+1} \to 1 \quad \text{per } r \to \infty$$

La fz. (continua) ha minimo assoluto all'interno del cerchio. Inoltre $f(x,y) > 1$ se $y < -\frac{1}{4}$, dunque ha anche massimo.

$$\nabla f = \left(\frac{-4x^2+4y^2+2y-4}{(x^2+y^2+1)^2} \, , \, \frac{2(1+4y)x}{(x^2+y^2+1)^2} \right)$$

Punti stazionari: $\left(0, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}\right)$ che sono i punti di massimo (segno −) e di minimo (segno +).