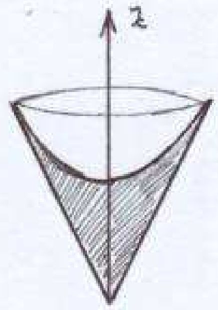
Soluzioni

1.

- Cono scavato da un paraboloide.



- $\operatorname{div} F = x^2 + y^2$

$$\Phi = \iint_{C(1)} (x^2+y^2)\,dx\,dy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3(1+r^2-2r)\,dr = \frac{\pi}{30}$$

- Flusso uscente dal cono

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = 2r \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$F = (2r,\ r^3 \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta,\ 2r^3\operatorname{sen}^2\theta)$

$\varphi_r \times \varphi_\theta = (-2r\cos\theta, -2r\operatorname{sen}\theta, r)$ diretto verso l'interno; occorre cambiare segno.

$$\Phi_1 = \int_0^1 4r^2\,dr \int_0^{2\pi} \cancel{\cos\theta\,d\theta} + \int_0^1 2r^4\,dr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta - \int_0^1 2r^4\,dr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \underset{(*)}{=} -\frac{3}{10}\pi$$

$$(*) \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \left[\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta \underset{2\theta = t}{=} \frac{1}{8}\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Flusso uscente dal paraboloide

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = 1+r^2 \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$F = (1+r^2,\ r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta,\ r^2(1+r^2)\operatorname{sen}^2\theta)$

$\varphi_r \times \varphi_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$ diretta in modo corretto

$$\Phi_2 = \int_0^1 -2r^2(1+r^2)\,dr \int_0^{2\pi} \cancel{\cos\theta\,d\theta} - \int_0^1 2r^5\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta + \int_0^1 r^3(1+r^2)\,dr \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{\pi}{12} + \frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$$

Flusso totale: $\frac{\pi}{30}$.

2. C.E. $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

non ci sono soluzioni costanti.

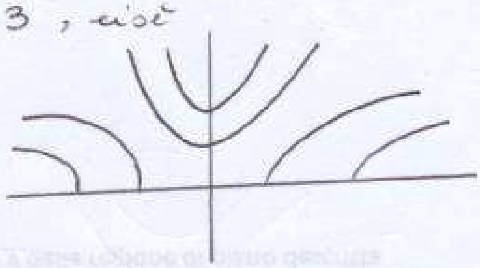
$$\int y e^{y^2} dy = \int x^5 dx \to \frac{1}{2} e^{y^2} = \frac{x^6 - c}{6} \to e^{y^2} = \frac{x^3 - c}{3} \to$$

$$y = \sqrt{\lg \frac{x^6 - c}{3}}$$

Deve essere $x^6 > c + 3$, cioè

$x \in \mathbb{R}$ se $c < -3$

$|x| > \sqrt[6]{3+c}$ se $c \geq -3$



3. Il campo è definito per $z \neq 0$, cioè nei due semispazi al di sopra o al di sotto del piano xy. Questo è un insieme non-connesso, unione di due insiemi disgiunti semplicemente connessi. Poichè $\operatorname{rot} F = 0$, il c.v. è conservativo in ciascun connesso. Cerchiamone un potenziale U.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -y^2 \operatorname{sen} xy \Rightarrow U = y \cos xy + \varphi(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{\cos xy} - \cancel{xy \operatorname{sen} xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{e^y}{z} + \cancel{\cos xy} - \cancel{xy \operatorname{sen} xy} \Rightarrow$$

$$\varphi(y, z) = \frac{e^y}{z} + \psi(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\cancel{\frac{e^y}{z^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\cancel{\frac{e^y}{z^2}} \Rightarrow \psi(z) = \text{costante}$$

$$U = y \cos xy + \frac{e^y}{z} + c$$

Nel calcolo non abbiamo dovuto distinguere se stiamo considerando il connesso $z > 0$ o quello $z < 0$; dunque l'espressione del potenziale è la stessa in entrambi gli insiemi, ma la costante non è necessariamente la stessa.

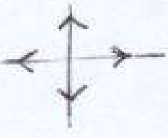
4. $f(x, 0) = |x| - 1$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ La fz. non è limitata.

$f(0, y) = |y| - y^2 - 1$ tende a $-\infty$ per $y \to \pm\infty$

Gli eventuali punti di massimo o minimo locale vanno cercati tra i punti stazionari interni e l'origine (punto di non derivabilità).

$\operatorname{grad} f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2y \right)$ si annulla in $(0, \pm\frac{1}{2})$

$H(0, \pm\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ punti di sella.



Perchè il punto sia di minimo deve essere localm.:

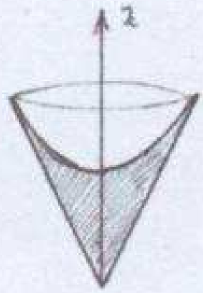
$\sqrt{x^2+y^2} - y^2 - 1 \geq -1 \iff r - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \geq 0 \iff r \operatorname{sen}^2 \theta \leq 1$. (intorno di $(0,0)$ di raggio $r < 1$)

Questo è vero per $r < 1$ perchè $r \operatorname{sen}^2 \theta \leq 1 \cdot 1 = 1$.

Soluzioni

1.

- Cono scavato da un paraboloide



- $\operatorname{div} F = x^2 + y^2$

$$\Phi = \iint_{C(2)} (x^2+y^2)\, dx\, dy \int_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4+x^2+y^2} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3(4+r^2-4r)\, dr = \frac{32}{15}\pi$$

- Flusso uscente dal cono

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le 2 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = 4r \end{cases}$$

$$F = (4r,\ r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta,\ 4r^3\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

$$\varphi_r \times \varphi_\theta = (-4r\cos\theta,\ -4r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r)$$

diretto verso l'interno; occorre cambiare segno.

$$\Phi_1 = \cancel{\int_0^2 16r^2\, dr \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta} + \int_0^2 4r^4\, dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta - \int_0^2 4r^4\, dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta \underset{(*)}{=} -\frac{96}{5}\pi$$

$$(*)\quad \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta = \left[\frac{\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 2\theta\, d\theta \underset{2\theta = t}{=} \frac{1}{8}\int_0^{4\pi} \mathrm{sen}^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}$$

Flusso uscente dal paraboloide

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le 2 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = 4 + r^2 \end{cases}$$

$$F = (4+r^2,\ r^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r^2(4+r^2)\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

$$\varphi_r \times \varphi_\theta = (-2r^2\cos\theta,\ -2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r)$$

diretta in modo corretto

$$\Phi_2 = \cancel{\int_0^2 -2r^2(4+r^2)\, dr \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta} - \int_0^2 2r^5\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\, d\theta + \int_0^2 r^3(4+r^2)\, dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{16}{3}\pi + \frac{80}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi$$

Flusso totale: $\frac{32}{15}\pi$

2. C.E. $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

non ci sono soluzioni costanti

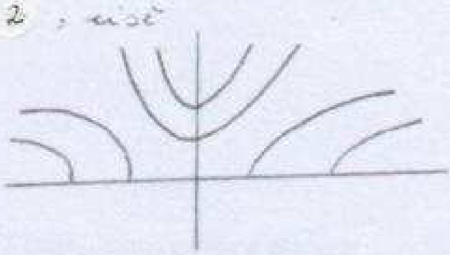
$$\int y e^{y^2} dy = \int x^3 dx \to \frac{1}{2} e^{y^2} = \frac{x^4 - c}{4} \to e^{y^2} = \frac{x^4 - c}{2} \to$$

$$y = \sqrt{\lg \frac{x^4 - c}{2}}$$

Deve essere $x^4 > c + 2$, cioè

$x \in \mathbb{R}$ $\quad c < -2$

$|x| > \sqrt[4]{2+c}$ $\quad c \geq -2$



3. Il campo è definito per $z \neq 0$, cioè nei due semispazi al di sopra o al di sotto del piano xy. Questo è un insieme non-connesso, unione di due insiemi disgiunti semplicemente connessi. Poiché $\operatorname{rot} F = 0$, il c.v. è conservativo in ciascun connesso. Cerchiamone un potenziale U

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} xy \Rightarrow U = x \cos xy + \varphi(x, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{\cos xy} - \cancel{xy \operatorname{sen} xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{e^x}{z} + \cancel{\cos xy} - \cancel{xy \operatorname{sen} xy} \Rightarrow$$

$$\varphi(x, z) = \frac{e^x}{z} + \psi(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\cancel{\frac{e^x}{z^2}} + \psi'(z) = -\cancel{\frac{e^x}{z^2}} \Rightarrow \psi(z) = \text{costante}$$

$$U = x \cos xy + \frac{e^x}{z} + c$$

Nel calcolo non abbiamo dovuto distinguere se stiamo considerando il connesso $z > 0$ o quello $z < 0$; dunque l'espressione del potenziale è la stessa in entrambi gli insiemi, ma la costante non è necessariamente la stessa.

4. $f(x, 0) = |x| - x^2 - 1$ tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$ La fz. non è limitata.

$f(0, y) = |y| - 1$ tende a $+\infty$ per $y \to \pm\infty$

Gli eventuali punti di massimo o minimo locale vanno cercati tra i punti stazionari interni e l'origine (punto di non derivabilità).

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$ si annulla in $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$

$H\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ punti di sella.

Perché il punto sia di minimo deve essere localm.:

$\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - 1 \geq -1 \iff r - r^2 \cos^2\theta \geq 0 \iff r \cos^2\theta \leq 1$ (intorno di $(0,0)$ di raggio $r < 1$)

Questo è vero per $r < 1$ perché $r \cos^2\theta \leq 1 \cdot 1 = 1$.