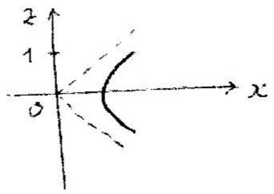
Soluzioni

- Σ è la superficie che si ottiene ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz avente equazioni parametriche $x = \sqrt{4+u^2}$, $z = u$ (con $|u| \le 1$), che è un arco dell'iperbole $x^2 - z^2 = 4$.

Σ è dunque un iperboloide di rotazione (di equazione $x^2+y^2-z^2=4$) limitato dai piani orizzontali $z = \pm 1$.



- Il bordo indicato è la circonferenza di centro $(0,0,1)$ e raggio $\sqrt{5}$ situata nel piano $z=1$. Una sua parametrizzazione è $x=\sqrt{5}\cos\theta$, $y=\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z=1$ ($\theta \in [0,2\pi]$). La circuitazione richiesta è dunque data da:

$$L = \int_0^{2\pi} (5\cos^2\theta,\ \sqrt{5}\cos\theta,\ \tfrac{1}{2}) \cdot (-\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \sqrt{5}\cos\theta,\ 0)\, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-5\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta + 5\cos^2\theta)\, d\theta = 5\pi.$$

Ritroviamo il risultato, calcolando il flusso di $\mathrm{rot}\,F = (0,0,1)$ uscente verso l'alto dal cerchio $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = 1$ (con $r \in [0,\sqrt{5}]$, $\theta \in [0,2\pi]$). Poiché $\Phi_r \times \Phi_\theta = (0,0,r)$, con l'orientamento richiesto, e poiché $\mathrm{rot}\,F \cdot (\Phi_r \times \Phi_\theta) = r$, si ottiene:

$$J = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} r\, dr = 5\pi.$$

- Per calcolare il flusso, conviene applicare il teorema della divergenza, calcolando l'integrale di $\mathrm{div}\,F = 2x + \frac{1}{2}$ nel dominio individuato da $-1 \le z \le 1$, $x^2+y^2 \le 4+z^2$:

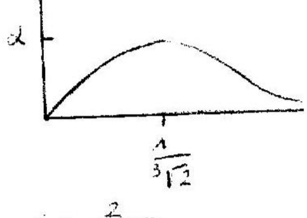
$$Y = \int_{-1}^{1} dz \iint_{x^2+y^2 \le 4+z^2} \left(2x + \tfrac{1}{2}\right) dx\, dy \underset{(*)}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(4+z^2)\, dz = \frac{13}{3}\pi$$

(*) l'integrale di $2x$ nel cerchio è nullo, perché è una funzione dispari (in particolare) nell'x in un dominio simmetrico rispetto all'asse; l'integrale della costante è la costante stessa moltiplicata per l'area del cerchio.

4.

$x(t)$

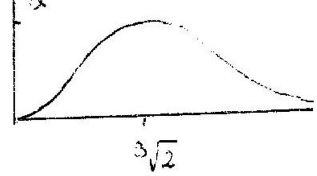
$$x = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

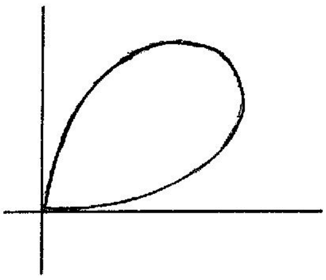


$\alpha = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$

$y(t)$

$$y(t) = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}$$





punto a tg. orizzontale

dove $\dot{y}=0$, cioè per $t=\sqrt[3]{2}$

punto a tg. verticale

dove $\dot{x}=0$, cioè per $t=1/\sqrt[3]{2}$

punto angoloso

l'origine; infatti la curva parte con tg. orizzontale e arriva (all'∞) con tg. verticale ($\dot{y}/\dot{x} \to +\infty$).

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \frac{1}{6}\int_1^{+\infty}\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{6}$$

$1+t^3 = z$

$3t^2\,dt = dz$

3. $S = \{z^2 - xy \le 1\} \cap \{z^2 - xy \ge 1\}$ entrambi chiusi

S interseca il piano $z=0$ nella curva $-xy=1$, che non è limitata (iperbole)

S è luogo degli zeri di $F(x,y,z) = z^2 - xy - 1$.

$\nabla F = (-y, -x, 2z)$ è nullo nell'origine, che non appartiene ad S.

Dunque S non ha punti singolari.

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - 1)$$

$$\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ 2z + 2\lambda z = 0 \\ z^2 - xy = 1 \end{cases}$$

Dalla terza eq. si ottiene $z=0$ opp. $\lambda=-1$ $\rightarrow$

A $\begin{cases} z=0 \\ 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = -1 \end{cases}$ opp. B $\begin{cases} 2x = -y \\ 2y = -x \\ z^2 - xy = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

A

x e y non possono essere nulli e dunque neppure λ lo è. Dividendo membro a membro seconda e terza eq.:

$\begin{cases} y/x = x/y \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ xy = -1 \end{cases}$

Si ottengono i punti

$(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$

per i quali $d^2 = 2$

B

Dalle prime due eq. si ottiene $x = y = 0$; dunque $z = \pm 1$. Per i punti $(0,0,\pm 1)$ si ha $d^2 = 1$. Questi sono dunque i punti di minima distanza.

Consideriamo la fz. vettoriale $F(x,y,z) = (z^2 - xy - 1,\ xz - 1)$.

$J_F = \begin{pmatrix} -y & -x & 2z \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$ $\quad J_F(1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha caratteristica 2

$\nabla f(1,0,1) \times \nabla g(1,0,1) = (-1,2,1)$

retta tangente $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ $\quad$ piano normale $(-1,2,1)\cdot(x-1, y, z-1) = 0$

$\Downarrow$

$x - 2y - z = 0$