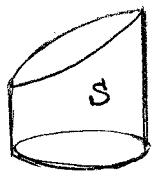
Soluzioni

1.



$$x = 2\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad 0 \le z \le 4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z$$

$$\phi_\theta = (-2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2\cos\theta,\ 0)$$
$$\phi_z = (0,0,1)$$
$$\phi_\theta \wedge \phi_z = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$$

$$A = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta} dz = 2\int_0^{2\pi}(4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = 16\pi$$

2.A Il volume racchiuso dalla superficie è caratterizzato da $x^2+y^2\le 4$, $0\le z\le 4-x-y$.

$$\iiint_V \mathrm{div}\,F\,dx\,dy\,dz = 3\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy\int_0^{4-x-y} dz = 3\iint_{x^2+y^2\le 4}(4-x-y)\,dx\,dy = 12\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy = 48\pi$$

(le fz. x, y sono dispari e dunque hanno integrale nullo sul cerchio; l'ultimo integrale è l'area del cerchio).

Flusso uscente dalla superficie S:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\le z\le 4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta \\ z \end{cases}$$

$$F\cdot(\phi_\theta\wedge\phi_z) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z)\cdot(2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$$

$$\Phi = 4\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta} dz = 4\int_0^{2\pi}(4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta = 32\pi.$$

Flusso uscente dalla base inferiore: $z=0$, $x^2+y^2\le 4$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0\le r\le 2 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ z=0 \end{cases}$$

$$F\cdot(\phi_r\wedge\phi_\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)\cdot(0,0,r)^* = 0$$

* L'orientamento non è quello richiesto, il flusso comunque è nullo.

Flusso uscente dalla base superiore: $z = 4-x-y$, $x^2+y^2\le 4$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0\le r\le 2 \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ z = 4-r\cos\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$F\cdot(\phi_r\wedge\phi_\theta) = F\cdot(r,r,r) = 4r$$

$$\Phi = \int_0^2 4r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi$$

3.
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ x+y+z = 4 \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I minori di ordine 2 $(2x-2y,\ 2x,\ 2y)$ si annullano contemporaneamente se $x=0$, $y=0$, $z\in\mathbb{R}$. Questi punti non stanno sulla curva.

Poiché la curva (un'ellisse) è un insieme chiuso e limitato, massimo e minimo per la funzione data esistono.

$$\mathcal{L} = z + \lambda(x^2+y^2-4) + \mu(x+y+z-4)$$

$$\begin{cases} 2\lambda x+\mu = 0 \\ 2\lambda y+\mu = 0 \\ 1+\mu = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \\ x+y+z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -1 \\ 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \\ x^2+y^2 = 4 \\ x+y+z = 4 \end{cases} \iff$$

Poiché $\lambda\ne 0$, da $2\lambda x = 1$, $2\lambda y = 1$ segue $x=y$. Sostituendo in $x^2+y^2=4$, si ottiene

$x=\sqrt2$; $y=\sqrt2$ $\to$ $z = 4-2\sqrt2$

$x=-\sqrt2$, $y=-\sqrt2$ $\to$ $z = 4+2\sqrt2$

$\max f = 4+2\sqrt2$ assunto in $(-\sqrt2,\ -\sqrt2,\ 4+2\sqrt2)$

$\min f = 4-2\sqrt2$ assunto in $(\sqrt2,\ \sqrt2,\ 4-2\sqrt2)$

La curva può essere parametrizzata nella forma $x=2\cos\theta$, $y=2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = 4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta$. Il problema è ricondotto a studiare la funzione $\varphi(\theta) = 4-\cos\theta-\mathrm{sen}\,\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ ($\varphi(0)=\varphi(2\pi)=3$, $\varphi'(\theta)=0$ per $\theta=\pi/4$ e $\theta=\frac{5}{4}\pi$).

2B.

Poichè rot F = (0,0,0), il flusso del rotore attraverso la superficie è nullo. Inoltre il campo (definito in un dominio semplicemente connesso) è conservativo e quindi la sua circuitazione lungo la curva è nulla.

Esplicitamente, questa circuitazione vale:

$$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 4-2\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)\cdot(-2\operatorname{sen}\theta,\ 2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta-2\cos\theta)\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} (8\operatorname{sen}\theta - 8\cos\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta)\,d\theta = 0$$

4. Poichè f, f_y sono continue in un intorno di (0,1), l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale è assicurata dal teorema di Cauchy.

Ponendo $y = xz$, $y' = z + xz'$, l'eq. diventa:

$$z + xz' = -\frac{2+3z}{3+2z} \rightarrow xz' = -2\,\frac{z^2+3z+1}{3+2z}$$

che è a variabili separate:

$$\int \frac{2z+3}{z^2+3z+1}\,dz = \int -\frac{2}{x}\,dx$$

$$\lg|z^2+3z+1| = -2\lg|x| + c$$

$$\lg|y^2+3xy+x^2| - \lg x^2 = -\lg x^2 + c$$

$$x^2+3xy+y^2 = R. \ (*)$$

La matrice associata alla forma bilineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori di segno discorde e dunque rappresenta un'iperbole.

(*) La C.I. è soddisfatta per R=1.