Soluzioni

1.

Calcolo del flusso attraverso la superficie

$$S : \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 + r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$$\varphi_r \wedge \varphi_\theta = (-r, 0, r) \qquad \mathrm{rot}\, F = (0, -z, -y) = (0, -1 - r\cos\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\text{Flusso} = \int_0^1 -r^2 dr \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\theta \, d\theta = 0$$

Circuitazione

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 + \cos\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\gamma' = (-\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, -\mathrm{sen}\,\theta) \qquad F = (\mathrm{sen}^2\theta, (1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta, (1+\cos\theta)^2)$$

$$\text{Circuitazione} = \int_0^{2\pi} \left[-\mathrm{sen}\,\theta (1 - \cos^2\theta) + \cos\theta(1+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta (1+\cos\theta)^2 \right] d\theta$$

$$\underset{\substack{\cos\theta = t \\ -\mathrm{sen}\,\theta \, d\theta = dt}}{=} \int_0^0 \ldots \, dt = 0$$

2.

Vogliamo rendere minima la fz. $x^2+y^2+z^2$ sul vincolo $z^2 - xy - 1 = 0$ (studiamo il quadrato della distanza; il punto di minimo rimane lo stesso).

Il luogo di zeri non ha punti singolari, perché $\nabla g = (-y, -x, 2z)$ si annulla solo nell'origine, che non appartiene al luogo.

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - 1)$$

$$\begin{cases} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ z(1+\lambda) = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\text{(a)} \begin{cases} z = 0 \\ 2x - \lambda y = 0 \\ 2x - \lambda x = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$$

$x, y \neq 0$ perché $xy = -1$

Dunque $\lambda = \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \rightarrow y^2 = x^2$

Troviamo i punti $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ sui quali la funzione vale 2.

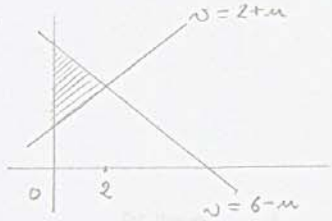
$$\text{(b)} \begin{cases} \lambda = -1 \\ 2x + y = 0 \\ 2y - x = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Troviamo i punti $(0, 0, \pm 1)$ sui quali la fz vale 1, cioè è minima.

3. $x = \sqrt[3]{\frac{v-u}{2}}$, $y = \frac{u+v}{2}$

Le condizioni che descrivono il dominio di integrazione diventano:

$$\begin{cases} \frac{v-u}{2} \le \frac{u+v}{2} \le 3 \\ \frac{v-u}{2} \ge 1 \end{cases} \iff 2 \le v-u \le u+v \le 6$$

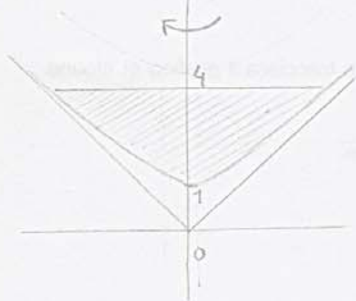


$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ 3x^2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 6x^2$$

$$\int_0^2 du \int_{2+u}^{6-u} \frac{\cancel{x^2}\, u e^v}{6 \cancel{x^2}}\, du\, dv = \int_0^2 u\, du \int_{2+u}^{6-u} e^v\, dv = \dots$$

Per parti: $\int u e^u du = e^u (u-1) + c$, $\int u e^{-u} du = -e^{-u}(u+1) + c$.

4.



$\nabla f = (4x, 2y, 0)$ si annulla sui punti dell'asse z con $1 < x < 4$; in questi punti la fz. assume il valore 0, che è ovviamente il minimo.

• Sulla base: $\begin{cases} z = 4 \\ x^2+y^2 \le 15 \end{cases}$ $\varphi = 2x^2 + y^2$

$\nabla \varphi = 0$ in $(0,0)$ che corrisponde a $(0,0,4)$ in cui la fz è ancora nulla.

Sul bordo $y^2 = 15 - x^2$, $\varphi = x^2 + 15$
massima per $x^2 = 15$ $(\pm\sqrt{15}, 0, 4))$ in cui vale 30
minima per $x^2 = 0$ $(0, \pm\sqrt{15}, 4)$ in cui vale 15.

• Sulla sup. laterale
$z = \sqrt{x^2+y^2+1}$
$x^2 + y^2 \le 15$

$\varphi = 2x^2 + y^2$
$\nabla \varphi = 0$ in $(0,0)$ che corrisponde a $(0,0,1)$ in cui la fz vale 0.

Dunque: $M = 30$, $m = 0$.

5. $K^2 - 2K + 2 = 0$ per $K = 1 \pm i \implies$ base V_0 : $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$.
Passando in campo complesso: $z'' - 2z' + 2z = e^{(1+i)x}$.
Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{z} = A x e^{(1+i)x}$, si trova $A = -i/2$ e dunque $\bar{z} = -\frac{1}{2} x e^x (\cos x + i \operatorname{sen} x)$,
Svolgendo i calcoli,
da cui $\bar{y}(x) = -\frac{1}{2} x e^x \cos x$.

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) - \frac{1}{2} e^x x \cos x .$$

Soluzioni [2]

1.
Calcolo del flusso attraverso la superficie

$$S : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

$\varphi_r \wedge \varphi_\theta = (0, -r, r) \qquad \mathrm{rot}\, F = (z, 0, y) = (1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0,\ 1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$\text{flusso} = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (r + r^2 \mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r\, dr = \pi .$$

Circuitazione

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 + \mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 + \mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$\gamma' = (-\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, \cos\theta) \qquad F = (\cos^2\theta,\ (1+\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta,\ (1+\mathrm{sen}\,\theta)^2)$

$$\text{circuitazione} = \int_0^{2\pi} (\cancel{-\mathrm{sen}\,\theta \cos^2\theta} + \cos^2\theta + \cancel{\mathrm{sen}\,\theta \cos^2\theta} + \cos\theta(1+\mathrm{sen}\,\theta)^2)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \left[\frac{\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta (1+\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta \underset{\substack{1+\mathrm{sen}\,\theta = t \\ \cos\theta\, d\theta = dt}}{=} \int_1^1 t^2\, dt = 0 \right)$$

2. Vogliamo rendere minima la fz. $x^2 + y^2 + z^2$ sul vincolo $x^2 - yz - 1 = 0$ (studiamo il quadrato della distanza; il punto di minimo rimane lo stesso).
Il luogo di zeri non ha punti singolari, perchè $\nabla g = (2x, -z, -y)$ si annulla solo nell'origine (che non appartiene al luogo).

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - yz - 1)$$

$$\begin{cases} 2x(\lambda + 1) = 0 \\ 2y - \lambda z = 0 \\ 2z - \lambda y = 0 \\ x^2 - yz = 1 \end{cases} \iff$$

(a) $\begin{cases} x = 0 \\ 2y - \lambda z = 0 \\ 2z - \lambda y = 0 \\ yz = -1 \end{cases}$ $y, z \neq 0$ perchè $yz = -1$. Dunque $\lambda = \frac{2y}{z} = \frac{2z}{y} \rightarrow y^2 = z^2$. Troviamo i punti $(0,1,-1)$, $(0,-1,1)$ sui quali la fz. vale 2.

(b) $\begin{cases} \lambda = -1 \\ 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x^2 - yz = 1 \end{cases}$ Troviamo i punti $(\pm 1, 0, 0)$ sui quali la fz. vale 1, cioè è minima.

3. Come [1]
4. Come [1], eccetto che per la slz. particolare : $\bar{y} = \mathrm{Re}\ -\frac{i}{2} x e^x (\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x) = \frac{1}{2} x e^x \,\mathrm{sen}\, x$.