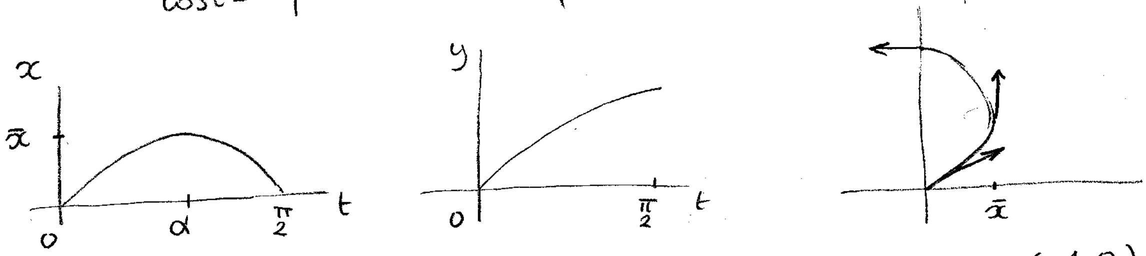
Soluzioni

1.

- La curva è semplice:
$$\begin{cases} t\cos t = s\cos s \\ \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} s \end{cases} \quad s,t \in [0,\pi/2] \implies s = t$$
- La parametrizzazione $\varphi(t)$ è di classe C^1; inoltre $\varphi'(t) \neq 0$.
  Infatti $\varphi'(t) = (\cos t - t\operatorname{sen} t,\ \cos t)$
  $\cos t = 0$ per $t = \pi/2$. Per questo valore di t la prima componente è $\neq 0$.



$T(0) = \left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) \qquad T(\alpha) = (0,1) \qquad T(\pi/2) = (-1,0)$

$$y_G = \frac{\iint_A y\,dx\,dy}{\iint_A dx\,dy} \underset{GG1}{=} \frac{\int_{\partial A^+} xy\,dy}{\int_{\partial A^+} x\,dy} \underset{GG2}{=} \frac{-\int_{\partial A^+} \frac{y^2}{2}\,dx}{-\int_{\partial A^+} y\,dx}$$

$$\int_{\partial A^+} xy\,dy = \int_0^{\pi/2} t\operatorname{sen} t\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} t\left(-\frac13\cos^3 t\right)'dt =$$
$$= \left[-\frac13 t\cos^3 t\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac13\cos^3 t\,dt = \dots = \left[\frac13\operatorname{sen} t - \frac19\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac29$$

$$\int_{\partial A^+} x\,dy = \int_0^{\pi/2} t\cos^2 t\,dt = \left[t\ \frac{t+\operatorname{sen} t\cos t}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(\frac t2 + \frac12\operatorname{sen} t\cos t\right)dt =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} - \left[\frac{t^2}{4} + \frac14\operatorname{sen}^2 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2-4}{16}$$

$$y_G = \frac{32}{9(\pi^2-4)}$$

Calcoli analoghi usando l'altra formula di G.G

2.

- $\iiint_V \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = \iint_S F\cdot N\,dS$

$\operatorname{div} = 2(1+z) \implies \iiint_V \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = 2\iint_{x^2+y^2\le1} dx\,dy\int_{-1}^{-x^2-y^2}(1+z)\,dz =$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\le1}\left(-x^2-y^2+\frac12(x^2+y^2)^2+\frac12\right)dx\,dy = 4\pi\int_0^1 r\left(-r^2+\frac12 r^4+\frac12\right)dr = \frac{\pi}{3}$$

Flusso uscente dalla base

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=-1 \end{cases} \quad u^2+v^2 \le 1$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = (0,0,1)$ che è orientato nel verso opposto a quello richiesto.

$\Phi = -\iint_{u^2+v^2\le 1} (u,v,1)\cdot(0,0,1)\,du\,dv = -\iint_{u^2+v^2\le1} du\,dv = -\pi$

Flusso uscente dal paraboloide

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=-x^2-y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=-u^2-v^2 \end{cases} \quad u^2+v^2 \le 1$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = (2u, 2v, 1)$ orientato nel verso richiesto.

$\Phi = \iint_{u^2+v^2\le 1} (u, v, (u^2+v^2)^2)\cdot(2u,2v,1)\,du\,dv = \iint_{u^2+v^2\le1} (2(u^2+v^2)+(u^2+v^2)^2)\,du\,dv =$

$= 2\pi \int_0^1 r(2r^2+r^4)\,dr = \dots = \frac{4}{3}\pi$

Flusso complessivo: $\frac{\pi}{3}$

- $\iint_S \text{rot}F\cdot N\,dS = \oint_{\partial S^+} F\cdot T\,ds$

$\text{rot}F=0$, quindi il primo integrale è nullo.

$\oint_{\partial S^+} F\cdot T\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\,dt = 0.$

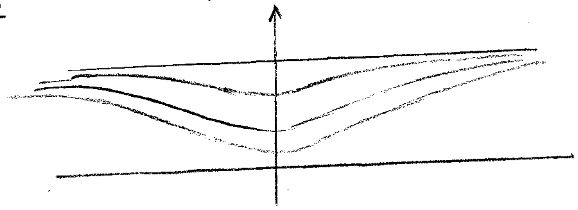
3. $A(x) = x \quad B(y) = \operatorname{sen} y \quad B'(y) = \cos y$ esistono continue nel C.E.

Dunque vale il teorema di esistenza e unicità locale.

$y=0$ e $y=\pi$ soluzioni costanti.

$\int \frac{dy}{\operatorname{sen} y} = \int x\,dx \Rightarrow \lg \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{x^2-c}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ke^{x^2/2} \; (K>0) \Rightarrow$

$y = 2\operatorname{arctg}(Ke^{x^2/2}), \; x\in\mathbb{R}$



4. $\nabla f = (6x-1, 1)$ mai nullo $\Rightarrow$ non ci sono punti stazionari interni

Sul segmento $y=x\in[-1,2]$

$\varphi(x) = 3x^2$

-1: (3) $\quad 0$: (0) $\quad 2$: (12) ← VALORE FZ

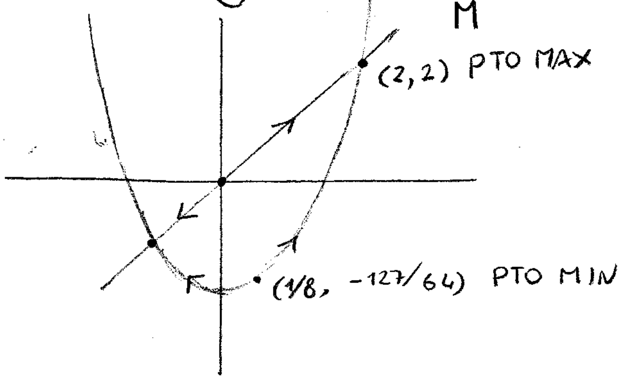
M

Sulla parabola $y=x^2-2$, $x\in[-1,2]$

$\varphi(x) = 4x^2-x-2$

-1: (3) $\quad 1/8$: (−33/16) $\quad 2$: (12)

m $\quad$ M



$(-1,-1)$ pto max locale: $\frac{\partial f}{\partial x}<0, \frac{\partial f}{\partial y}>0$ loc.

$(0,0)$ pto di sella: $\frac{\partial f}{\partial x}<0, \frac{\partial f}{\partial y}>0$ loc.