Soluzioni

1. Con le notazioni consuete, $a(x) = \cos x$, $A(x) = \operatorname{sen} x$.

$$(y e^{\operatorname{sen} x})' = e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx \underset{\substack{\operatorname{sen} x = t \\ \cos x \, dx = dt}}{=} \int t e^t \, dt = e^t (t-1) + c = e^{\operatorname{sen} x} (\operatorname{sen} x - 1) + c$$

$$y e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x} (\operatorname{sen} x - 1) + c \rightarrow y = \operatorname{sen} x - 1 + c e^{-\operatorname{sen} x}$$

2. Vedi punti (b), (c) del compito del 20. 1. 2012.

3. $$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \iff (12 - 4\alpha) x^3 y + (12 - 4\alpha) x y^3 = 0 \iff \alpha = 3.$$

$$\int \frac{x(x^2 - 3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \, dx \underset{\substack{x^2 = t \\ 2x\,dx = dt}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{t - 3y^2}{(t+y^2)^3} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{t + y^2 - 4y^2}{(t+y^2)^3} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+y^2)^2} - 2y^2 \int \frac{dt}{(t+y^2)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(y)$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{2(x^2+y^2)^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2 - x^2}{2(x^2+y^2)^2} \right) + \varphi'(y) = \frac{3x^2 y - y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

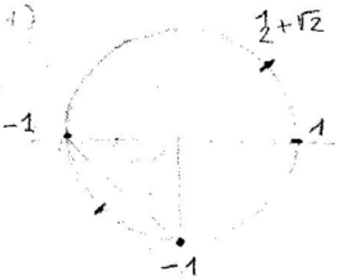
$$\frac{3x^2 y - y^3}{(x^2+y^2)^3} + \varphi'(y) = \frac{3x^2 y - y^3}{(x^2+y^2)^3} \implies \varphi(y) = c$$

$$U = \frac{y^2 - x^2}{2(x^2+y^2)^3} + c$$

4.

Consideriamo la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ come luogo di zeri della funzione $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Il punto $(0,0,0)$ è singolare perché $g(0,0,0) = 0$ e $\nabla g(0,0,0) = (0,0,0)$; dunque per questo punto non vale il metodo dei moltiplicatori; così come non vale per il bordo della superficie, dato dalla circonferenza $z=1$, $x^2+y^2=1$.

- $f(0,0,0) = 0$
- Sulla circonferenza, ci riconduciamo a studiare la f. $G(\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta + \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
$G'(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta + \cos\theta = (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta + 1)$



- A questo punto applichiamo il metodo dei moltiplicatori.

$$\mathcal{L} = xy + xz + yz + \lambda(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} y + z + 2\lambda x = 0 \\ x + z + 2\lambda y = 0 \\ x + y - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda eq. dalla prima: $(y-x)(1-2\lambda) = 0$.

(a) $\begin{cases} y = x \\ x(1+2\lambda) + z = 0 \\ x - \lambda z = 0 \\ 2x^2 - z^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ Se $\lambda = 0$, troviamo $x=y=z=0$ (caso già considerato)
Se $\lambda \neq 0$: $z = x/\lambda$.
Sostituendo nella seconda eq: $x(1+2\lambda) + \frac{x}{\lambda} = 0 \rightarrow$
$x(2\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \rightarrow x = 0$, da cui nuovamente $x = y = z = 0$

(b) $\begin{cases} \lambda = 1/2 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Sul cono privato del bordo e del vertice il metodo dei moltiplicatori non fornisce nessun punto.
In conclusione il massimo e il minimo (che esistono per il teorema di Weierstrass) sono dati da:

$\text{MAX} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ assunto nel punto $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$\text{MIN} = -1$ assunto nei punti $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, -1, 1)$.