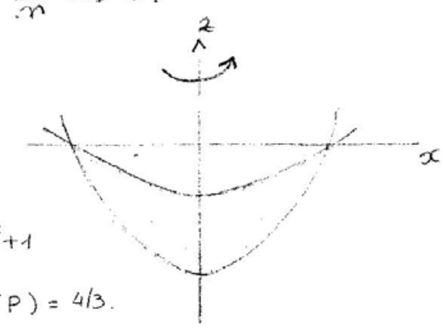
Soluzioni

1.

La serie converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ per il teorema di Leibniz.
(Infatti $\frac{x+n}{n^2} \to 0$ decrescendo).
Non c'è convergenza totale in $[-r, r]$ perché $\| f_n(x) \| = \frac{r+n}{n^2} \sim \frac{1}{n}$
e la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.
Per provare la convergenza uniforme si tiene conto del fatto che la serie è a segno alterno e si applica la maggiorazione stabilita dal teorema di Leibniz:

$$\| S_n - S \| \leq \| f_{n+1} \| = \frac{r+n+1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n} \to 0.$$



2.

- $\nabla f = (y, x+1, -1)$: non esistono punti stazionari
- Studiamo la fz. sulla superficie $\begin{cases} z = x^2+y^2-1 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$.

  Questo equivale a studiare $F(x,y) = (x+1)y - x^2 - y^2 + 1$ sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$.

  $\nabla F = (y-2x,\ x+1-2y)$ nullo in $P = (1/3, 2/3)$; $F(P) = 4/3$.

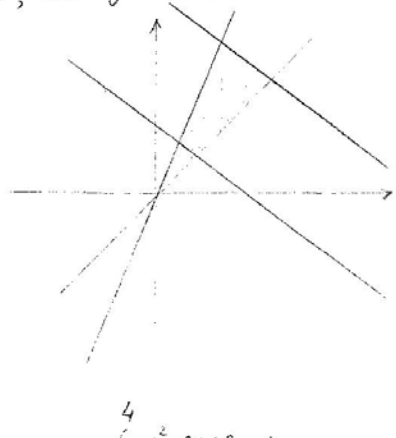
  Sul bordo del cerchio, si studia $G(\theta) = (\cos\theta + 1)\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

  $G'(\theta) = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ se $\cos\theta = -1$ oppure $\cos\theta = 1/2$.

  $G(0) = G(2\pi) = G(\pi) = 0$, $G(\pi/3) = 3\sqrt{3}/4$, $G(2\pi/3) = -3\sqrt{3}/4$.
- Studiamo la fz. sulla superficie $\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2+y^2-1) \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

  Questo equivale a studiare $\mathfrak{F}(x,y) = (x+1)y - \frac{1}{2}(x^2+y^2-1)$ sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$. Basta studiare i punti stazionari interni perché il comportamento sulla circonferenza coincide con quello già studiato.

  $\nabla \mathfrak{F} = (y-x,\ x+1-y)$ non è mai nullo.
- In conclusione, $\max f = 4/3$ in $(1/3, 2/3, -4/9)$, $\min f = -3\sqrt{3}/4$ in $(1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$.



3. $\begin{cases} u = y/x \\ v = x+y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{v}{1+u} \\ y = \frac{uv}{1+u} \end{cases}$

$1 \leq u, v \leq 3$

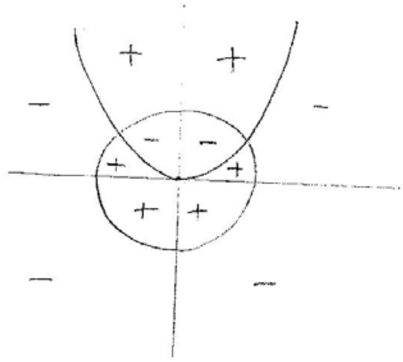
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{pmatrix}$$

$|J| = v/(1+u)^2$

$$\int_1^3 \frac{1+u^2}{(1+u)^3}\,du \int_1^3 v\,dv = 4 \int_1^3 \frac{1+u^2}{(1+u)^3}\,du \underset{1+u=s}{=} 4 \int_2^4 \frac{s^2-2s+2}{s^3}\,ds \ \ldots\ldots$$

4. Definita in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Segno e zeri: vedi figura



Su $y=0$: $\lim_{x \to \pm\infty} -x^2 \lg x^2 = -\infty$

Su $x=0$ $\lim_{y \to +\infty} y \lg y^2 + \infty$

Il limite all'∞ non esiste.

Per calcolare il limite per $(x,y) \to (0,0)$ passiamo a coordinate polari:

$$\frac{1}{2} r (\operatorname{sen}\vartheta - r\cos\vartheta) \lg r$$

$\frac{1}{2} r \lg r \to 0$ per $r \to 0$

$\operatorname{sen}\vartheta - r\cos\vartheta$ fz. limitata

Dunque il limite vale 0. Poniamo $f(0,0) = 0$.

Per $x=0$ la fz. diventa $2y\lg y$ che non è derivabile per $y=0$.

Dunque non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e di conseguenza la funzione non è differenziabile nel punto.