Soluzioni

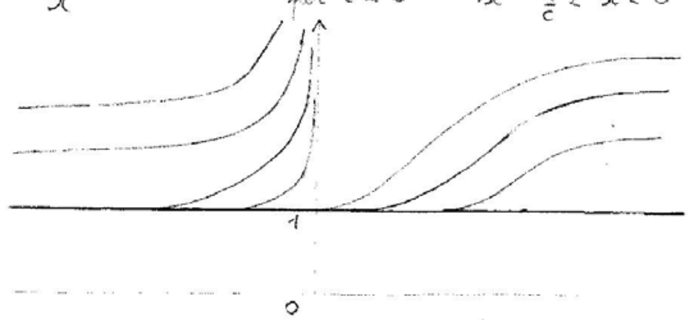
1\. C.E $x \neq 0$, $y \geq 1$.
la funzione $f(x,y) = 2\sqrt{y-1}/x^2$ è continua nel suo C.E., ma $\partial f/\partial y = 1/x^2\sqrt{y-1}$ non è limitata nell'intorno dei punti $(x_0, 1)$ (con $x_0 \neq 0$ per restare nel C.E.). In questi punti non vale il teorema di esistenza e unicità locale per il problema con condizione iniziale.

L'eq. è a variabili separate.
da f.z. $y = 1$ è soluzione costante ($x \neq 0$)
Per trovare le altre soluzioni, si procede come di consueto:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y-1}} = \int \frac{dx}{x^2} \longrightarrow \sqrt{y-1} = c - \frac{1}{x} \longrightarrow$$

$$y = 1 + \left(c - \frac{1}{x}\right)^2$$ sotto la condizione $c - \frac{1}{x} > 0$.

$\frac{cx-1}{x} > 0$ per $c > 0$ se $x < 0$ oppure $x > 1/c$
per $c < 0$ se $\frac{1}{c} < x < 0$



L'intervallo massimale è $x < 0$ oppure $x > 0$ (poiché deve essere $x \neq 0$, non possiamo prendere $\mathbb{R}$ come intervallo massimale)

2\. Il campo è irrotazionale se $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$, cioè se $-8xy + -4ay = -2bxy$ in tutto il dominio in cui il campo è definito. L'identità vale per $a = 0$, $b = 4$.
Il campo è definito in $\mathbb{R}^2 - \{x^2 + 2y^2 = 1\}$. L'ellisse $x^2 + 2y^2 = 1$ divide il piano in due regioni connesse: quella racchiusa dalla curva è semplicemente connessa e quindi in questa regione il campo è conservativo; l'altra non è semplicemente connessa. Per verificare se il campo è conservativo anche qui, basta calcolare il lavoro sulla curva $x^2 + 2y^2 = 4$ (ad esempio).

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,t \end{cases} \longrightarrow \mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\cos t}{3}, \frac{4\sqrt{2}\,\text{sen}\,t}{3}\right) \cdot \left(-2\,\text{sen}\,t, \sqrt{2}\cos t\right) dt = 0$$

in entrambe le regioni connesse.
Dunque il campo è conservativo in entrambe le regioni connesse.
Calcoliamo il potenziale U.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 2y^2 - 1} \Rightarrow U = \lg|x^2 + 2y^2 - 1| + \varphi(y)$$

$$\frac{4y}{x^2 + 2y^2 - 1} + \varphi'(y) = \frac{4y}{x^2 + 2y^2 - 1} \Rightarrow \varphi(y) = c$$

Dunque, $U = \lg|x^2+2y^2-1|$ in entrambe le regioni connesse.
Per calcolare il lavoro sulla curva data utilizzando il potenziale, basterà scrivere $U(10, 2\pi) - U(10, 0) = \lg\frac{99+8\pi^2}{99}$.
Usando la definizione, conviene sostituire la curva data con una più semplice avente gli stessi estremi (dato che il campo è irrotazionale, il risultato non cambia). Scelto il segmento verticale di equazioni $x=10,\ y=t$ $(t\in[0,2\pi])$, si ha:

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{20}{99+2t^2}, \frac{4t}{99+2t^2}\right)\cdot(0,1)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{4t}{99+2t^2}\,dt = \Big[\lg(99+2t^2)\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= \lg\frac{99+8\pi^2}{99}.$$

3. La linea di livello ha equazione $xe^{-x^2-2y^2} = e^{-3}$.
Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -3e^{-3} \neq 0$, nell'intorno di $(1,1)$ la curva è grafico di una funzione $\varphi(x)$.
Ora questa funzione vale $\varphi(1)=1$ (dato del problema).
La sua derivata prima è data dal teorema del Dini, la derivata seconda si ottiene derivando in forma implicita. Poiché per calcolare la derivata seconda occorre tener conto della derivata prima in forma implicita, possiamo seguire in entrambi i casi questa strada

$$xe^{-x^2-2y^2} = e^{-3} \quad \forall x\in U(1) \Rightarrow$$

$$e^{-x^2-2y^2} + xe^{-x^2-2y^2}(-2x-4yy') = 0$$

$$e^{-x^2-2y^2}(-2x-4yy') + e^{-x^2-2y^2}(-2x-4yy') + xe^{-x^2-2y^2}(-2x-4yy')^2 + xe^{-x^2-2y^2}(-2-4y'^2-4yy'') = 0$$

Per $x=1,\ y=1$, dalla prima identità ricaviamo $y' = -1/4$.
Dalla seconda, $y'' = -13/16$.
Dunque $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{13}{32}(x-1)^2 + o(x-1)^2$.
Nel caso esaminato si riesce a scrivere concretamente la fz. $\varphi(x)$:

$$xe^{-x^2-2y^2} = e^{-3} \Rightarrow \lg x - x^2 - 2y^2 = -3 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{\lg x - x^2 + 3}{2}}$$

(La scelta del segno positivo per x ed y è dovuta al fatto che stiamo lavorando in un intorno di $(1,1)$).

4. Poiché la superficie data è chiusa, possiamo calcolare il flusso utilizzando il teorema della divergenza.
$\operatorname{div} F = 1 + x + y$.

$$\Phi = \int_0^2\int_0^2\int_0^2 (1+x+y)\,dx\,dy\,dz = 8 + 4\int_0^2 x\,dx + 4\int_0^2 y\,dy = 24.$$