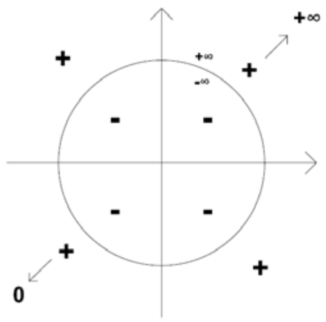
Soluzioni [ 1 ]

1.




C.E. $\quad R^2 - \{ (x, y) \ / \ x^2 + y^2 = 1 \}$

SEGNO $\quad$ Come in figura

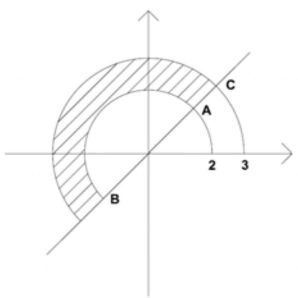
LIMITI $\quad$ Il limite ai punti di frontiera non esiste, perché vale +∞ o -∞, a seconda che ci si avvicini da fuori o da dentro il cerchio.

All'infinito vale +∞ nel I quadrante (dove x + y > 0) , 0 nel III (dove x + y < 0); di conseguenza negli altri quadranti non esiste.

Dalla figura deduciamo l'esistenza di un punto di minimo locale nel I quadrante (fuori del cerchio) e quella di un punto di massimo locale dentro il cerchio.

$$\nabla f = \left( \frac{e^{x+y}\,(x^2+y^2-1-2x)}{(x^2+y^2-1)^2} \ , \ \frac{e^{x+y}\,(x^2+y^2-1-2y)}{(x^2+y^2-1)^2} \right)$$

Punti stazionari: $P_1 = \left( \frac{1+\sqrt{3}}{2} \ , \ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$ , $P_2 = \left( \frac{1-\sqrt{3}}{2} \ , \ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$ che sono i due punti cercati.




La funzione è continua nel compatto assegnato e dunque assume valore massimo e minimo. Poiché non ci sono punti stazionari interni, questi valori sono assunti sulla frontiera.

Sulla semicirconferenza interna (x = 2 cos t , y = 2 sen t ; π/4 ≤ t ≤ 5π/4) la funzione assume la forma $e^{2(\operatorname{sen} t + \cos t)}/3$ e nell'intervallo ha derivata sempre diversa da 0. Dunque dobbiamo prendere in considerazione solo i valori agli estremi dell'intervallo; e dunque A = $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, B = $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

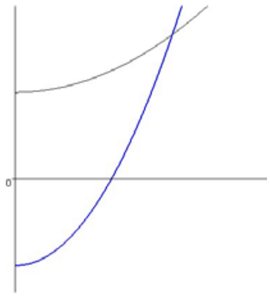
Stesse considerazioni e conclusioni sulla semicirconferenza esterna (x = 3 cos t , y = 3 sen t ; π/4 ≤ t ≤ 5π/4) dove la funzione assume la forma $e^{3(\operatorname{sen} t + \cos t)}/8$.

I punti che interessano sono C = $(3\sqrt{2}/2 \ , \ 3\sqrt{2}/2)$ , D = $(-3\sqrt{2}/2 \ , -3\sqrt{2}/2)$.

Sui lati AC e BD la funzione vale $e^{\sqrt{2}\,r} \ / \ (r^2 - 1)$ ed $e^{-\sqrt{2}\,r} \ / \ (r^2 - 1)$ rispettivamente , con 2 ≤ r ≤ 3. In entrambi i casi la derivata non si annulla e dunque ritroviamo i punti precedenti.

Confrontando i valori in questi punti, si trova che il massimo è assunto in C, il minimo in D.

2.



Essendo una regione di rotazione attorno all'asse delle z, il baricentro è sull'asse; dunque dobbiamo calcolare solo la quota z.

$$\text{Vol A} = 2\pi \int_0^{1/2} x\,(x^2+1)\,dx + 2\pi \int_{1/2}^{\sqrt{2/3}} x\,(2-3x^2)\,dx = .....$$

L'integrale di z può essere calcolato per sezioni o per fili; di seguito riportiamo i due metodi.

Per sezioni:

$$\int_0^1 z\,dz \iint_{x^2+y^2\le(1+z)/4} dx\,dy + \int_1^{5/3} z\,dz \iint_{z-1\le x^2+y^2\le(1+z)/4} dx\,dy =$$

$$\pi\int_0^1 z\,\frac{z+1}{4}\,dz + \pi\int_1^{5/3} z\left(\frac{z+1}{4} - z + 1\right) dz = .....$$

Per fili:

$$\int_0^1 z\,dz \iint_{x^2+y^2\le(1+z)/4} dx\,dy + \int_1^{5/3} z\,dz \iint_{z-1\le x^2+y^2\le(1+z)/4} dx\,dy = =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1/4} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+1\right)^2 dx\,dy + \iint_{1/4\le x^2+y^2\le 2/3} \frac{1}{2}\left(\left(x^2+y^2+1\right)^2 - \left(4(x^2+y^2)-1\right)^2\right) dx\,dy$$

A questo punto si procede passando a coordinate polari nel piano.

$$\pi\int_0^{1/2} r\,(r^2+1)^2\,dr + \pi\int_{1/2}^{\sqrt{2/3}} r\left[(r^2+1)^2 - (4r^2+1)^2\right] dr = .....$$

3.

Criterio del rapporto: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+1}{n}\,|\,x\,| \to |\,x\,|$

La serie converge puntualmente nell'intervallo ( -1 , 1 ) . Per sostituzione diretta si trova che non converge agli estremi. Essendo una serie di potenze, converge uniformemente in ogni intervallo [ a , b ] $\subset$ ( -1 , 1 ) .

Utilizzando il teorema di derivazione sotto segno di serie, si ottiene:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{x^2}{(1-x)^2} .$$

4.

Per x = 0 le funzione sono nulle, dunque f ( 0 ) = 0 .

Per $0 < \bar{x} \le 2\pi$, definitivamente risulta $\pi / n < \bar{x}$ e dunque $f_n(\bar{x}) = 0$.

In conclusione , f ( x ) = 0 in tutto l'intervallo.

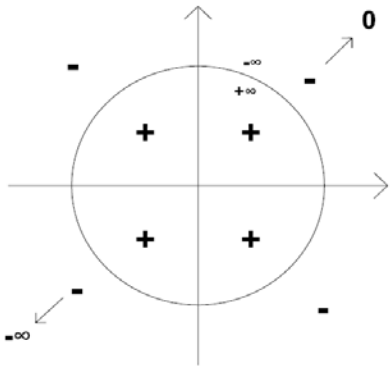
La convergenza non è uniforme, perché $\| f_n \| = n$ .

In ogni intervallo $[\varepsilon, 2\pi]$ , definitivamente risulta $f_n = 0$ e dunque $\| f_n \| = 0$.

Infine: $\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi/n} n \operatorname{sen} nx \; dx = \left[ -\cos nx \right]_0^{\pi/n} = 2$ , mentre $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ .

Soluzioni [ 2 ]

1.




C.E. $R^2 - \left\{ (x, y) \; / \; x^2 + y^2 = 1 \right\}$

SEGNO Come in figura

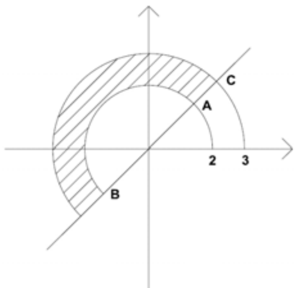
LIMITI Il limite ai punti di frontiera non esiste, perché vale -∞ o +∞, a seconda che ci si avvicini da fuori o da dentro il cerchio.

All'infinito vale 0 nel I quadrante (dove x + y > 0) , -∞ nel III (dove x + y < 0); di conseguenza negli altri quadranti non esiste.

Dalla figura deduciamo l'esistenza di un punto di massimo locale nel III quadrante (fuori del cerchio) e quella di un punto di minimo locale dentro il cerchio.

$$\nabla f = \left( \frac{e^{-x-y}(x^2+y^2-1+2x)}{(x^2+y^2-1)^2} \; , \; \frac{e^{-x-y}(x^2+y^2-1+2y)}{(x^2+y^2-1)^2} \right)$$

Punti stazionari: $P_1 = \left( \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \; , \; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right)$ , $P_2 = \left( \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \; , \; \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)$ che sono i due punti cercati.




La funzione è continua nel compatto assegnato e dunque assume valore massimo e minimo. Poiché non ci sono punti stazionari interni, questi valori sono assunti sulla frontiera.

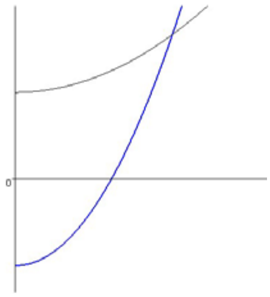
Sulla semicirconferenza interna (x = 2 cos t , y = 2 sen t ; π/4 ≤ t ≤ 5π/4) la funzione assume la forma $- e^{2(\text{sen}\, t + \cos t)}/3$ e nell'intervallo ha derivata sempre diversa da 0. Dunque dobbiamo prendere in considerazione solo i valori agli estremi dell'intervallo; e dunque A = $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, B = $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Stesse considerazioni e conclusioni sulla semicirconferenza esterna (x = 3 cos t , y = 3 sen t ; π/4 ≤ t ≤ 5π/4) dove la funzione assume la forma $-e^{-3(\text{sen}\, t + \cos t)}/8$. I punti che interessano sono C = $(3\sqrt{2}/2 \; , \; 3\sqrt{2}/2)$ , D = $(-3\sqrt{2}/2 \; , -3\sqrt{2}/2)$.

Sui lati AC e BD la funzione vale $e^{-\sqrt{2}\, r} \; / \; (1 - r^2)$ ed $e^{\sqrt{2}\, r} \; / \; (1 - r^2)$ rispettivamente , con 2 ≤ r ≤ 3. In entrambi i casi la derivata non si annulla e dunque ritroviamo i punti precedenti.

Confrontando i valori in questi punti, si trova che il massimo è assunto in C, il minimo in D.

2.



Essendo una regione di rotazione attorno all'asse delle z, il baricentro è sull'asse; dunque dobbiamo calcolare solo la quota z.

$$\text{Vol A} = 2\pi \int_0^{\sqrt{1/2}} x\,(x^2+1)\,dx + 2\pi \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{3}} x\,(2-x^2)\,dx = \ldots\ldots$$

L'integrale di z può essere calcolato per sezioni o per fili; di seguito riportiamo i due metodi.

Per sezioni:

$$\int_0^1 z\ dz \iint_{x^2+y^2 \le (1+z)/2} dx\,dy + \int_1^3 z\ dz \iint_{(1+z)/2 \le x^2+y^2 \le z-1} dx\,dy =$$

$$\pi \int_0^1 z\,\frac{z+1}{2}\,dz + \pi \int_1^3 z\left(z-1-\frac{z+1}{2}\right) dz = \ldots\ldots$$

Per fili:

$$\iint_{x^2+y^2 \le 1/2} dx\,dy \int_0^{x^2+y^2+1} z\,dz + \iint_{1/2 \le x^2+y^2 \le 2} dx\,dy \int_{2(x^2+y^2)-1}^{x^2+y^2+1} z\,dz =$$

$$\iint_{x^2+y^2 \le 1/2} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+1\right)^2 dx\,dy + \iint_{1/2 \le x^2+y^2 \le 2} \frac{1}{2}\left(\left(x^2+y^2+1\right)^2 - \left(2(x^2+y^2)-1\right)^2\right) dx\,dy$$

A questo punto si procede passando a coordinate polari nel piano.

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} r\,(r^2+1)^2\ dr + \frac{\pi}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} r\left[(r^2+1)^2 - (2r^2-1)^2\right] dr = \ldots\ldots$$

3.

Criterio del rapporto: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+3}{n+2}\,|\,x\,| \to |\,x\,|$

La serie converge puntualmente nell'intervallo $(-1, 1)$. Per sostituzione diretta si trova che non converge agli estremi. Essendo una serie di potenze, converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Utilizzando il teorema di derivazione sotto segno di serie, si ottiene:

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+2})' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)' = \left( \frac{1}{1-x} - 1 - x \right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

$$f(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}.$$

4.

Per x = 0 le funzione sono nulle, dunque f ( 0 ) = 0 .

Per $0 < \bar{x} \leq 2\pi$, definitivamente risulta $\pi / n < \bar{x}$ e dunque $f_n(\bar{x}) = 0$.

In conclusione , f ( x ) = 0 in tutto l'intervallo.

La convergenza non è uniforme, perché $\| f_n \| = n$ .

In ogni intervallo $[\varepsilon, 2\pi]$ , definitivamente risulta $f_n = 0$ e dunque $\| f_n \| = 0$.

Infine: $\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi/2n} n \cos nx \; dx = \left[ \operatorname{sen} nx \right]_0^{\pi/2n} = 1$ , mentre $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ .