Soluzioni

1.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \left|\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \frac{3y^2}{x} = 3u$$

$$I = \int_1^e \frac{du}{3u} \int_1^{\sqrt2} \frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} = \frac13 \int_1^{\sqrt2} \frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} = \frac13 \int_0^1 \frac{ds}{s^2+1} = \frac{\pi}{12}$$

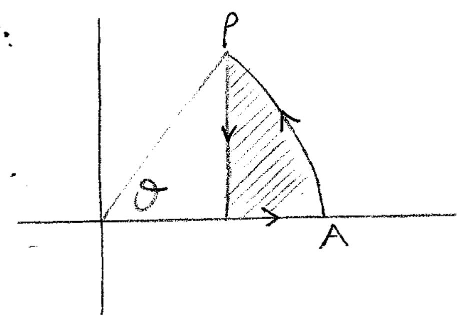
$$\sqrt{v^2-1} = s \qquad \frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\,dv = ds$$

2.

La fz. non è di classe C^1 nei punti in cui $x=1$.
Su questi punti la fz. diventa $\varphi(y) = y^2-1$, $y \in [-\sqrt3, \sqrt3]$ ed assume massimo 2 nei punti $(1, \pm\sqrt3)$, minimo -1 nel punto $(1,0)$.
$\nabla f = (-2x + 9\,\mathrm{sgn}(x-1),\ 2y)$ si annulla nei punti $(\pm \frac92, 0)$ che non appartengono al dominio
Per studiare il comportamento sulla circonferenza, data la simmetria possiamo limitarci alla semicirconferenza $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$.
La funzione diventa $\varphi(x) = 4 - 2x^2 + 9|x-1|$. Studiando il segno di $\varphi'(x)$, si trova che ha valore massimo 23 nel punto $(-2,0)$ e minimo 2 nel punto $(1,\sqrt3)$ (e nel simmetrico $(1,-\sqrt3)$).
In conclusione, $\max f = 23$ $\min f = -1$.

Studiamo adesso la funzione in $\mathbb{R}^2$.
Per quanto visto sopra, sulla retta dei punti di non differenziabilità c'è solo un punto di minimo locale in $(1,0)$
Nei punti stazionari $(\pm\frac92, 0)$, si ha $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; dunque sono di sella.

3.



Data la simmetria, l'area è 4 volte quella della regione tratteggiata.
Essendo $P = (\frac12, \frac{\sqrt3}{2})$, risulta $\vartheta = \pi/3$.

$$A = 4 \int_{\partial D^+} x\,dy$$

Sull'arco $\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$ $0 \le \vartheta \le \pi/3$, si ha $4\int_0^{\pi/3} \cos^2\vartheta\,d\vartheta =$

$$= 4\left[\frac{\vartheta + \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/3} = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt3}{4}\right)$$

Sul tratto verticale $\begin{cases} x = 1/2 \\ y = t \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt3/2$, si ha $-4\int_0^{\sqrt3/2} \frac12\,dt = -\sqrt3$
Sul tratto orizzontale l'integrale è nullo perchè y è costante.
In conclusione $A = \frac23\pi - \frac{\sqrt3}{2}$.
Calcoli analoghi usando l'altra formula di G.G.: $A = -4\int_{\partial D^+} y\,dx$.

4.

Poichè $A(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $B(y) = \frac{1+y^2}{y}$, $B'(y) = \frac{y^2-1}{y}$ sono continue in un intorno di $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, il problema ha una sola soluzione.

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \int \frac{x}{1-x^2}\, dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} \lg (1+y^2) = -\frac{1}{2} \lg (1-x^2) + \frac{1}{2} \lg K$$

Imponiamo la C.I., si trova $K=2$; dunque $\frac{1}{2} \lg (1+y^2) = \frac{1}{2} \lg \frac{2}{1-x^2}$ e dunque (essendo $y>0$) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$, definita in $(-1,1)$.