Soluzioni

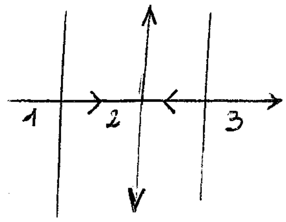
1\. In A la funzione non è limitata sup.: $\lim_{y\to\pm\infty} f(2,y) = +\infty$.

E' invece limitata inf.: $f(x,y) \geqslant 1 - x^3 \geqslant -26$.

$$\nabla f = \left(-3x^2 + \frac{12x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \frac{12y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \text{con } (x,y) \neq (0,0) \notin A.$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 4 \operatorname{sgn} x \end{cases}$$

L'unico punto stazionario $P = (2,0)$ è di sella; lo si può verificare per restrizioni o con la matrice hessiana:



$$\mathcal{H}(2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

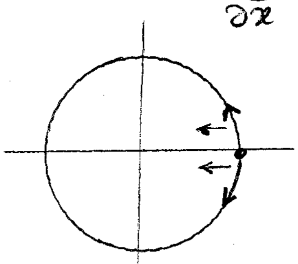
Dunque, in A la funzione non ha punti di massimo o minimo assoluti o locali.

Per il teorema di Weierstrass, in B la funzione f assume valore massimo e minimo. I punti di massimo o minimo assoluto devono essere cercati tra:

- i punti interni di non differenziabilità: $(0,0)$; $f(0,0) = 1$.
- i punti stazionari interni: $(2,0)$, che abbiamo già trovato essere di sella
- i punti della frontiera. Sulla circonferenza la funzione vale $37 - x^3$, con $x \in [-3,3]$. Il valore massimo è in $(-3,0)$ e vale 64, il minimo è in $(3,0)$ e vale 10.

In conclusione: $\max f = 64$ in $(-3,0)$, $\min f = 1$ in $(0,0)$.

Il punto $(3,0)$ è di minimo locale. Tenendo conto che $\frac{\partial f}{\partial x}(3,0) = -15$, per continuità $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ in un intorno del punto:



2\. $\begin{cases} 3\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 3 \\ x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$ $\qquad \mathcal{I} = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy \int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{3} (x+y+z)\,dz =$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left[3(x+y)\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{9}{2}\left(1-x^2-y^2\right)\right] dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\left[\ 3r(1-r)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + \frac{9}{2}(1-r^2)\right] dr =$$

$$= \int_0^1 3r^2(1-r)\, dr \int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\, d\theta + 2\pi \int_0^3 \frac{9}{2} r(1-r^2)\, dr$$

$$= 9\pi \int_0^1 (r - r^3)\, dr = \frac{9}{4}\pi .$$

3. Parametrizzazione della superficie di rotazione: $\begin{cases} x = (2+\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (2+\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi \\ z = 3+\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi = \big(-\cos\theta(2+\cos\theta)\cos\varphi,\ -\cos\theta(2+\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi,$$
$$-\operatorname{sen}\theta\,(2+\cos\theta)\big)$$

$$\|\varphi_\theta \wedge \varphi_\phi\| = 2+\cos\theta$$

$$\delta = |z| = 3+\operatorname{sen}\theta$$

$$\mathcal{M} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (3+\operatorname{sen}\theta)(2+\cos\theta)\, d\theta = 2\pi \int_0^{2\pi} 6\, d\theta = 24\pi^2.$$

4. C.E. $x > 0$ (richiesto dal problema), $y \in \mathbb{R}$.
Le funzioni $f(x,y) = -y^2/x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y/x$ sono continue (e limitate) in un intorno del punto $(1,1)$. Il problema ammette una ed una sola soluzione.

$$\int -\frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x} \iff \frac{1}{y} = \lg x + c .$$

La C.I. è verificata per $c = 1$.

$$\frac{1}{y} = \lg x + 1 \implies y = \frac{1}{\lg x + 1} .$$

Poiché cerchiamo soluzioni positive, deve essere $\lg x + 1 > 0$, cioè $x > e^{-1}$.