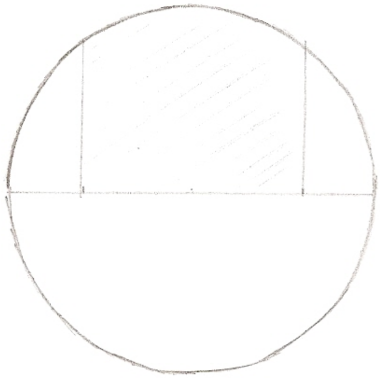
Soluzioni

1.



Dominio : $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$

$\operatorname{div} F = x+y+1$

$$\iiint_D (x+y+1)\,dx\,dy\,dz = \iint_C dx\,dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x+y+1)\,dz$$

$$= \iint_C \left(\cancel{x\sqrt{4-x^2-y^2}} + \cancel{y\sqrt{4-x^2-y^2}} + \sqrt{4-x^2-y^2} \right) dx\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,dr = \dots = \frac{2}{3}\pi\left(8-3\sqrt{3}\right).$$

Il flusso uscente dalla superficie che delimita il dominio è la somma di tre contributi:

(a) cerchio di base

Il versore normale uscente è $-k$; poichè sulla base è $F_3=0$, la componente normale del campo è nulla e dunque nullo è il flusso.

(b) parte della superficie sferica

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{4-u^2-v^2} \end{cases} \qquad C:\ u^2+v^2 \le 1$$

$$\hat{N} = \varphi_u \wedge \varphi_v = \left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, 1 \right)$$

$$F\cdot\hat{N} = u^2v + uv^2 + 4 - u^2 - v^2 \ / \ \sqrt{4-u^2-v^2}$$

$$\Phi = \iint_C \sqrt{4-u^2-v^2}\,du\,dv$$ (per simmetria gli altri termini danno contributo nullo).

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{4-r^2} = \dots = \frac{2}{3}\pi\left(8-3\sqrt{3}\right)$$

(c) superficie laterale

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \\ z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le z \le \sqrt{3} \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{array}$$

$$\hat{N} = \varphi_\vartheta \wedge \varphi_z = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 0) \qquad F\cdot\hat{N} = \operatorname{sen}\vartheta\cos^2\vartheta + \cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta$$

$$\Phi = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}\vartheta\cos^2\vartheta + \cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\right) d\vartheta = 0.$$

$y = \pm \pi/2$ soluzioni costanti

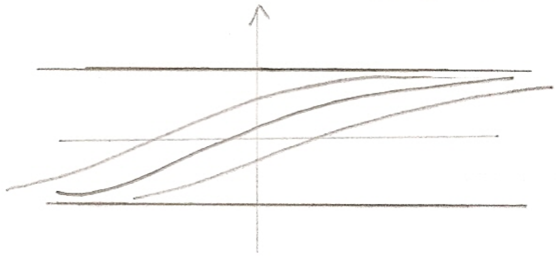
$\frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} y$ è limitata. Quindi il problema con condizione iniziale ha un'unica soluzione. Di conseguenza le altre soluzioni non intersecano quelle costanti.

$$\int \frac{dy}{\cos y} = x - c \Rightarrow \int \frac{\cos y}{1-\operatorname{sen}^2 y}\, dy = x - c \underset{\operatorname{sen} y = t}{\Rightarrow} \int \frac{dt}{1-t^2} = x - c$$

$$\Rightarrow \lg \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} y}{1-\operatorname{sen} y}} = x - c \Rightarrow \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} y}{1-\operatorname{sen} y}} = K e^x \quad (K>0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{K^2 e^{2x}-1}{K^2 e^{2x}-1} \Rightarrow y = \arcsin \frac{K^2 e^{2x}-1}{K^2 e^{2x}+1}$$

Deve essere $-1 \leq \frac{K^2 e^{2x}-1}{K^2 e^{2x}+1} \leq 1$, il che è vero $\forall x \in \mathbb{R}$.

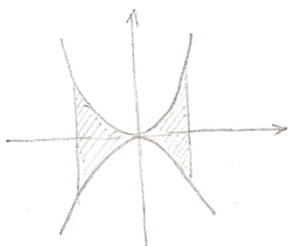


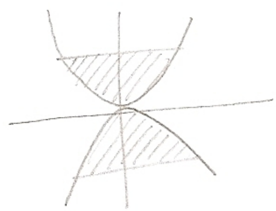
3.

$0 \leq z \leq 1 - x^2$ opp. $0 \leq z \leq 1 - |y|$

$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \leq 1 - |y| \end{cases}$ opp. $\begin{cases} 1 - |y| \geq 0 \\ 1 - |y| \leq 1 - x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 \\ -x^2 \leq y \leq x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - |y| \\ y \geq x^2 \text{ opp. } y \leq -x^2 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$





Tenendo conto delle simmetria

$$V = 4 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{1-x^2} dz + 4 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{1-y} dz =$$

$$4 \int_0^1 x^2(1-x^2)\, dx + 4 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (1-y)\, dy =$$

$$4 \int_0^1 x^2(1-x^2)\, dx + 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \dots = \frac{8}{5}$$

4. La linea di livello ha equazione $e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) = -1$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y} - 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = -e+2 \neq 0$

Per il teorema del Dini, in un intorno di P la linea è grafico di una funzione $\varphi(x)$ di classe C^1 in un intorno di $x_0 = 0$.
Derivando in forma implicita, si ottiene:

$$e^{x-y}(1-y') + 2x - 2yy' - e = 0$$
$$e^{x-y}(1-y')^2 - e^{x-y}y'' + 2 - 2y'^2 - 2yy'' = 0$$

Da cui (per $x=0$, $y=-1$):

$$\varphi'(0) = 0 \qquad \varphi''(0) = 1 + \frac{e}{2} > 0 .$$

Queste condizioni assicurano che $\varphi(x)$ ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale.

#