Soluzioni

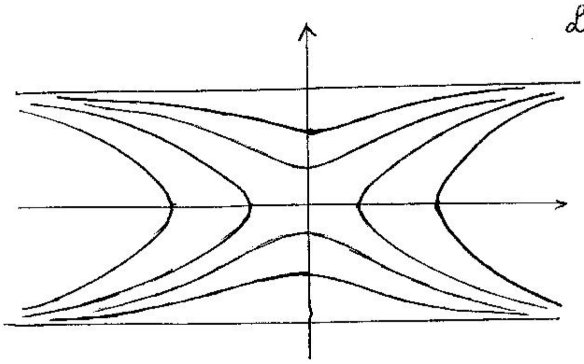
1. L'equazione è definita per $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}-\{0\}$; tenendo conto di quanto richiesto, la studiamo per $y \in (-1,0) \cup (0,1)$.
$\partial f/\partial y$ è limitata nell'intorno di ogni punto del C.E.; in particolare dunque le soluzioni non si intersecano con quelle costanti $y = \pm 1$.
Con il consueto metodo di integrazione delle equazioni a variabili separate, si ha:

$$\int \frac{y}{1-y^2}\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \implies -\frac{1}{2}\lg(1-y^2) = \frac{1}{2}\lg(1+x^2) - \frac{1}{2}\lg k$$

$$\implies \lg(1-y^2) = \lg\frac{k}{1+x^2} \implies y^2 = 1 - \frac{k}{1+x^2}$$

$$\implies y = \pm\sqrt{\frac{x^2+1-k}{x^2+1}}$$

Deve essere $0 < \frac{x^2+1-k}{x^2+1} < 1$.
Essendo $k>0$, il rapporto è sempre <1.
La condizione di positività è verificata:
$\forall x \in \mathbb{R}$ se $0<k<1$
$\forall x : |x| > \sqrt{k-1}$ se $k \geq 1$.



2. Le condizioni date assicurano che è $x>0$; si possono dunque riscrivere nella forma $1 \le y^2/x \le 2$, $1 \le xy \le \sqrt{2}$.
Poniamo $u = y^2/x$, $v = xy$.

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\begin{pmatrix} -y^2/x^2 & 2y/x \\ y & x \end{pmatrix}\right| = \frac{3y^2}{x}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{x}{3y^2} = \frac{1}{3u}$$

$$y = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} = \frac{1}{3}\lg 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} = \frac{1}{3}\lg 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dv}{v^2\sqrt{1-\frac{1}{v^2}}} =$$

$$\underset{\frac{1}{v}=z}{=} -\frac{1}{3}\lg 2\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{12}\lg 2.$$

3. Sul piano è $z = -x-y$; deve essere $x^2+y^2+(x+y)^2 \le 1$, cioè $2x^2 + 2y^2 + 2xy \le 1$.
Ci riconduciamo a studiare la funzione $F(x,y) = -2y$ nel compatto $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2+xy \le \frac{1}{2}\}$.
Poiché F non ha punti stazionari, dobbiamo solo considerare la restrizione alla frontiera. Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Infatti la funzione $g(x,y) = x^2+y^2+xy-\frac{1}{2}$ non

ha punti singolari, dato che $\nabla g = (2x+y,\ 2y+x) = \mathbf{0}$ se $(x,y)=\mathbf{0}$ che non appartiene al luogo degli zeri.
Posto $\mathcal{L} = -2y + \lambda\left(x^2+y^2+xy-\frac{1}{2}\right)$, deve essere

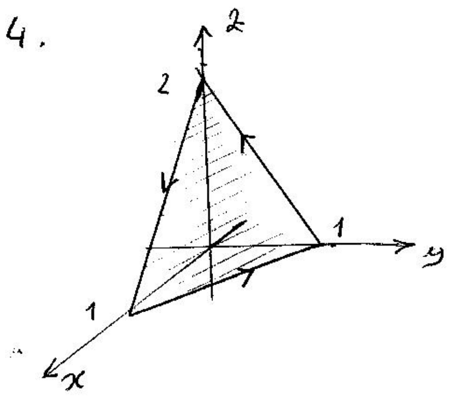
$$\begin{cases} 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ -2 + 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ x^2+y^2+xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

(a) $\lambda = 0$
incompatibile con la seconda eq.

(b) $y = -2x$
Sostituendo nella 3ª eq., si ottengono i due punti:
$P_1 = \left(1/\sqrt{6},\ -2/\sqrt{6}\right)$, $P_2 = \left(-1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)$.

In definitiva, $\max f = f(P_1) = 4/\sqrt{6}$, $\min f = f(P_2) = -4/\sqrt{6}$.

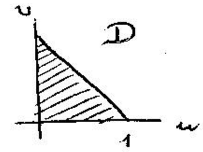
4.



$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & y & z \end{pmatrix} = (0, 0, -x)$$

La superficie si parametrizza nella forma

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2(1-u-v) \end{cases} \qquad \text{con } \begin{array}{l} u, v \geq 0 \\ u+v \leq 1 \end{array}$$



$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (2, 2, 1)$$

orientato coerentemente con l'orientamento della curva (v. figura).

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \iint_D -u \, du\, dv = -\int_0^1 u \, du \int_0^{1-u} dv = \int_0^1 (u^2 - u)\, du = -\frac{1}{6}$$

Calcoliamo il lavoro nella curva:

$(1,0,0) \to (0,1,0)$ $\quad \varphi(t) = (1-t, t, 0)$ $\quad \int_0^1 (t-t^2, t, 0)\cdot(-1,1,0)\, dt = \frac{1}{3}$

$(0,1,0) \to (0,0,2)$ $\quad \varphi(t) = (0, 1-t, 2t)$ $\quad \int_0^1 (0, 1-t, 2t)\cdot(0,-1,2)\, dt = \frac{3}{2}$

$(0,0,2) \to (1,0,0)$ $\quad \varphi(t) = (t, 0, 2-2t)$ $\quad \int_0^1 (0,0,2-2t)\cdot(1,0,-2)\, dt = -2$

Il lavoro complessivo è dunque $-\frac{1}{6}$, coerentemente con il risultato precedentemente trovato.

#