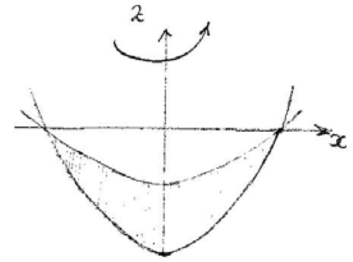
Soluzioni



1. (a)

- $\nabla f = (y, x+1, -1)$: non esistono punti stazionari
- Studiamo la fz. sulla superficie $\begin{cases} z = x^2+y^2-1 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

  Questo equivale a studiare la funzione $F(x,y) = $
  $= (x+1)y - x^2 - y^2 + 1$ sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$.
  $\nabla F = (y-2x, x+1-2y)$ nullo in $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (a cui sulla superficie corrisponde il punto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9})$); in questo punto la fz. vale $4/3$.
  Sul bordo del cerchio, si studia la fz. $G(\theta) = (\cos\theta + 1)\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
  $G'(\theta) = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ se $\cos\theta = -1$ oppure $\cos\theta = \frac{1}{2}$.
  $G(0) = G(2\pi) = 0$, $G(\pi) = 0$, $G(\pi/3) = 3\sqrt{3}/4$, $G(2\pi/3) = -3\sqrt{3}/4$.
- Studiamo la fz. sulla superficie $\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2+y^2-1) \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

  Questo equivale a studiare la fz. $\mathcal{F}(x,y) = (x+1)y - \frac{1}{2}(x^2+y^2-1)$ sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$. Basta studiare i punti stazionari interni perché il comportamento sulla circonferenza coincide con quello già studiato.
  $\nabla \mathcal{F} = (y-x, x+1-y)$ non è mai nullo.
- In conclusione, $\max f = 4/3$ in $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9})$, $\min f = -3\sqrt{3}/4$ in $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

(b)

La curva di intersezione è la circonferenza $\begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$; parametrizzata nella forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, il lavoro lungo essa vale:

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + 1, \operatorname{sen}\theta, 0)\cdot(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = -\int^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0.$$

Possiamo applicare il teorema di Stokes calcolando il flusso di rot F attraverso il cerchio $\begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ (con faccia positiva quella superiore).
Poiché $\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ D_x & D_y & D_z \\ x+1 & y & (x+1)z \end{pmatrix} = (0, -z, 0)$, sul cerchio è rot F = 0 e dunque nullo è il flusso.

(c)

Superficie $\begin{cases} z = x^2+y^2-1 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = r^2 - 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \longrightarrow \varphi_r \wedge \varphi_\theta = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$

$$\text{Area} = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr \underset{\substack{4r^2+1 = s \\ 8r\,dr = ds}}{=} \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{s}\, ds = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

Superficie $\begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2+y^2-1) \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = \frac{1}{2}(r^2-1) \end{cases}$ $\begin{matrix} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \longrightarrow \varphi_r \wedge \varphi_\theta = (-r^2\cos\theta, -r^2\operatorname{sen}\theta, r)$

$$\text{Area} = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\, dr \underset{\substack{r^2+1 = s \\ 2r\,dr = ds}}{=} \pi \int_1^2 \sqrt{s}\, ds = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1).$$

2. Con le notazioni standard: $a(x) = -\mathrm{tg}\,x \rightarrow A(x) = \lg\cos x$ (Nell'intervallo dato il valore assoluto è superfluo). Dunque:

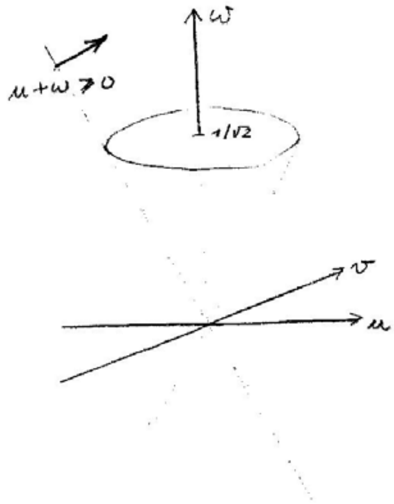
$$(y\cos x)' = x^2\cos x.$$

Poichè $\int x^2\cos x\,dx = x^2\,\mathrm{sen}\,x + 2x\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x + c$ (il risultato è ottenuto con due applicazioni del metodo di integrazione per parti),

$$y = x^2\,\mathrm{tg}\,x + 2x - 2\,\mathrm{tg}\,x + \frac{c}{\cos x}.$$

3. Il c. di v. inverso fornisce $x = \frac{u-w}{\sqrt{2}}$, $y = v$, $z = \frac{u+w}{\sqrt{2}}$.
La matrice jacobiana:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



ha determinante uguale a 1. Dunque:

$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} du\,dv\,dw.$$

Il problema è ricondotto a calcolare il volume della regione delimitata dal cono $u^2+v^2-w^2=0$ e dal piano $w = 1/\sqrt{2}$, situata nel semispazio $u+w \geq 0$.
Si ottiene dunque:

$$\begin{cases} \sqrt{u^2+v^2} \leq w \leq 1/\sqrt{2} \\ u^2+v^2 \leq 1/2 \end{cases}$$

da cui

$$\iint_{u^2+v^2\leq 1/2} du\,dv \int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{1/\sqrt{2}} dw = \iint_{u^2+v^2\leq\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{u^2+v^2}\right) du\,dv =$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}} r^2\,dr = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}.$$