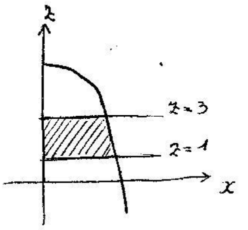
Soluzioni

1.



Data la simmetria, il baricentro si trova sull'asse z.

$$\bar z_G = \frac{\int_1^3 z\,dz \iint_{x^2+y^2\le 6-z} dx\,dy}{\int_1^3 dz \iint_{x^2+y^2\le 6-z} dx\,dy} = \frac{\int_1^3 z(6-z)\,dz}{\int_1^3 (6-z)\,dz} = \dots = \frac{23}{12}.$$

La curva del piano xz si parametrizza nella forma

$$\begin{cases} x = t \\ z = 6-t^2 \end{cases} \qquad \sqrt{3} \le t \le \sqrt{5}.$$

La superficie da questa generata per rotazione attorno all'asse z si parametrizza dunque nella forma

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 6-t^2 \end{cases} \qquad \sqrt{3} \le t \le \sqrt{5}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Il punto P si ottiene per $t=2$, $\theta = \pi/2$.
Poiché $\varphi_t \wedge \varphi_\theta = (2t^2\cos\theta,\ 2t^2 \,\mathrm{sen}\,\theta,\ t)$, nel punto P è $N = (0,4,1)/\sqrt{17}$.

2. Con le notazioni consuete, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$ è limitata nell'intorno di $(1,1)$. Il teorema di Cauchy assicura esistenza e unicità locale.
Ponendo $\sqrt{y} = z > 0$, cioè $y = z^2$, $y' = 2zz'$, l'equazione diventa:

$$2zz' = \frac{z^2}{x} + \sqrt{x}\, z.$$

La soluzione $z=0$ (fornisce $y=0$) è non accettabile.
L'eq.

$$z' - \frac{z}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

è lineare del primo ordine.
Con le consuete notazioni, $a(x) = -\dfrac{1}{2x}$, $A(x) = -\dfrac{1}{2}\lg x$, $e^{A(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Dunque, $\left(\dfrac{z}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{z}{\sqrt{x}} = \dfrac{x+c}{2} \Rightarrow z = \dfrac{(x+c)\sqrt{x}}{2} \Rightarrow$

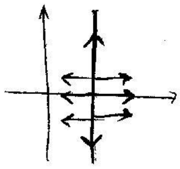
$y(x) = \dfrac{x}{4}(x+c)^2$ definita per le $x>0$ tali che $x+c>0$.
Imponendo la c.i., si trova $c=1$.
In conclusione, $y(x) = \dfrac{x}{4}(x+1)^2$, $\forall x > 0$

3. L'esistenza del massimo e minimo per la funzione sul dominio assegnato è assicurata dal teorema di Weierstrass.
Punti stazionari interni: $\nabla f = (9\,\mathrm{sgn}(x-1) - 2x,\ 2y)$ non si annulla in nessun punto interno.
Punti interni singolari: sono i punti della corda $x=1$, $y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
Sulla corda la funzione vale $\varphi(y) = y^2-1$ e dunque ha minimo -1 nel punto $(1,0)$ e massimo 2 nei punti della frontiera $(1, \pm\sqrt{3})$.

Sulla frontiera, essendo $y^2 = 4 - x^2$, si ottiene $\Psi(x) = 4 + 9|x-1| - 2x^2$, con $x \in [-2, 2]$. Poichè Ψ' non si annulla, i punti che interessano sono: $(1, \pm\sqrt{3})$ (già considerati), $(2, 0)$ in cui la funzione vale 5, $(-2, 0)$ in cui vale 23.
In conclusione:

$$\max f = 23 \quad \text{assunto in } (-2,0)$$
$$\min f = -1 \quad \text{assunto in } (1,0).$$

Che in $\mathbb{R}^2$ la funzione sia non limitata, si ottiene subito esaminandone il comportamento all'∞ sugli assi.
Ai punti stazionari $(\pm 9k, 0)$ corrisponde la matrice hessiana $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; dunque i due punti sono di sella.
Rimangono da esaminare i punti della retta $x = 1$. Indicando nel modo consueto le direzioni di crescenza, si ha:



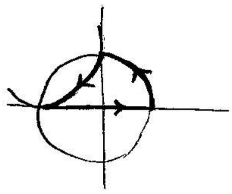
Questo prova che $(1,0)$ è un punto di minimo locale.

La superficie si parametrizza nella forma

$$\begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 9(1-u). \end{array}$$

$$9 = \sqrt{2} \int_0^1 du \int_0^{9(1-u)} dv = \dots = \frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

4.



$$A = \int_{\gamma^+} x \, dy$$

Il tratto orizzontale non dà contributo, essendo y costante.
Sul tratto curvilineo nel I quadrante:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \left[\frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Su quello nel secondo quadrante:

$$\begin{array}{l} x = -1 + \cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{array} \quad \frac{3}{2}\pi \le t \le 2\pi \quad \Rightarrow \; - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (-1 + \cos t) \cos t \, dt = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$A = 1.$