Esercizi sul calcolo di limiti con il principio di sostituzione

1.

Calcolare i seguenti limiti, usando – ove possibile – il principio di sostituzione:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^{x+2}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\text{sen}^2 x}{x+(2+e^x)\,\text{sen}x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,2x}{\text{tg}\,3x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\pi/2 - \arccos x}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x\log(1+\text{sen}\,x)}$ (f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2^x}{x^x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\text{sen}x} - \cos x}{e^{2x} - e^{-2x}}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{(2x^2+1)^5 - 1}{\log\cos x}$ (i) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$

(l) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{(1-x^2)/x}$ (m) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\text{sen}x}{2x-\cos x}$ (n) $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\text{sen}\,x - \text{sen}(\pi/4)}{x-(\pi/4)}$

2.

Delle seguenti funzioni (infinitesime per x → x_0) trovare l'ordine e la parte principale:

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+x^2}$, $x_0 = 0^+$ (b) $\sqrt{x}-\sqrt{x+x^2}$, $x_0 = 0^+$ (c) senx – tgx , $x_0 = 0$

(d) $\log\cos\frac{x(2x+1)}{1-x^2}$, $x_0 = 0^+$ (e) 1 - senx , $x_0 = \pi/2$ (f) arccosx , $x_0 = 1^-$

3.

Calcolare i seguenti limiti, facendo uso del principio di sostituzione:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2-1/x)\log x - \log x^3}{\log x + x\,e^{-x^2}}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+7}{\sqrt{x^2+4}}$.

4.

Calcolare i seguenti limiti, facendo uso – ove possibile – del principio di sostituzione:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+e^x-\cos x}$

(c) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{\arccos x - \sqrt{1-x}}{(1-x)^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x + e^x - \cos x}$

(e) $\lim_{x \to \pi/6} \dfrac{x - \pi/6}{2\,\mathrm{sen}x - 1}$

(f) $\lim_{x \to +\infty} \log \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{\sqrt{x^4+1} - 1}$

(g) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{\log(1-2x^2) + 2\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{tg}^2 x}$

(i) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \log\left(\cos \dfrac{2+x}{1+x^2}\right)$

(l) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5x-1} - 2x}{e^{-1/x} - 1}$.

Soluzioni

1.

(a) e^2 (b) ¼ (c) 0 (d) 1 (e) -1/2 (f) 0

(g) ¼ (h) – 20 (i) exp (1/3) (l) 0 (m) 3/2 (n) $1/\sqrt{2}$

2.

(a) ½ , $2\sqrt{x}$ (b) 3/2 , $-x^{3/2}/2$ (c) 3 , $-x^3/2$

(d) 2 , $-x^2/2$ (e) 1 , $\pi/2 - x$ (f) ½ , $\sqrt{2(1-x)}$

3.

(a) - 1 (b) - 5

4.

(a) 1 (b) ¼ (c) $-\infty$ se $\alpha > ½$, - 1 se $\alpha = ½$, 0 se $\alpha < ½$

(d) 0 (e) $1/\sqrt{3}$ (f) 0 (g) $1/\sqrt{2}$

(h) 0 (i) -½ (l) e^6