Calcolo integrale – soluzioni degli esercizi proposti N. 2

1.

1. L'integrale esiste perché la funzione è generalmente continua: il punto $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
   Per calcolare le primitive, si esegue il cambiamento di variabile $tg (x / 2) = t$.
   Le primitive sono le funzioni $\log \left(1 + tg^2 (x / 2) \right) + c$.
   L'integrale vale $\log (2 / 3)$.

2. L'integrale esiste perché la funzione è generalmente continua: il punto $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
   Per calcolare le primitive, si esegue il cambiamento di variabile $\sqrt{x} = t$.
   Le primitive sono le funzioni $2 \left(\exp (\sqrt{x}) - \sqrt{x} \right) + c$.
   L'integrale vale $2 (e^2 - 3)$.

3. L'integrale esiste perché la funzione è generalmente continua: il punto $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
   Data la presenza del valore assoluto, scriviamo l'integrale nella somma di due integrali :
   $$\int_{-4}^{0} \frac{x}{x - 2\sqrt{-x}}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{x - 2\sqrt{x}}\, dx .$$
   Per calcolare le primitive, si esegue il cambiamento di variabile $\sqrt{-x} = t$ nel primo integrale, $\sqrt{x} = t$ nel secondo.
   Le primitive sono le funzioni $x + 4\sqrt{-x} - 8 \log (\sqrt{-x} + 2) + c$ per il primo integrale, le funzioni $x + 4\sqrt{x} + 8 \log (\left| \sqrt{x} - 2 \right|) + c$ per il secondo.
   L'integrale vale 1 .

4. L'integrale esiste perché la funzione è continua.
   Per calcolare le primitive, si esegue il cambiamento di variabile $\cos x = t$.
   Le primitive sono le funzioni $\frac{2}{5}\sqrt{\cos x}\, (\cos^2 x - 5) + c$.
   L'integrale vale $\frac{1}{10}\left(\frac{18}{\sqrt[4]{2}} - \frac{19}{\sqrt{2}} \right)$.

5. L'integrale esiste perché la funzione è continua.
   Per calcolare le primitive, si esegue il cambiamento di variabile $\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x = t$.
   Le primitive sono le funzioni $-\log \left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - x + 2 \right| + c$.
   L'integrale vale $\log \left(\frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{2} + 1} \right)$.

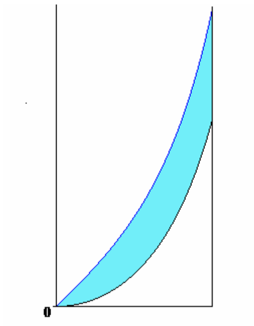
6. L'integrale esiste perché la funzione è continua.
   Per calcolare le primitive, si applica il metodo di scomposizione di Hermite, tenendo conto che risulta $x^3 + 8 = (x + 2) (x^2 - 2x + 4)$.
   Le primitive sono le funzioni $\log \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x + 2} + \sqrt{3}\, arctg \frac{x - 1}{\sqrt{3}} + c$.
   L'integrale vale $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} - \frac{1}{2} \log 3$.

7. L'integrale esiste perché la funzione è continua.
   Per calcolare le primitive, si integra per parti, tenendo conto che una primitiva di $1 / \cos^2 x$ è $tg\, x$.
   Le primitive sono le funzioni $x\, tg\, x + \log \left| \cos x \right| + c$.
   L'integrale vale $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$.

8. L'integrale esiste perché la funzione è generalmente continua: il punto $x = 0$ è una discontinuità eliminabile .
Per calcolare le primitive, si integra per parti, tenendo conto che una primitiva di x è $x^2 / 2$.
Le primitive sono le funzioni $\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{2} + c$.
L'integrale vale $e^2 / 4$ (per $x = 0$ alla funzione $x^2 \log x$ si assegna il valore 0 come valore di continuità).

2.

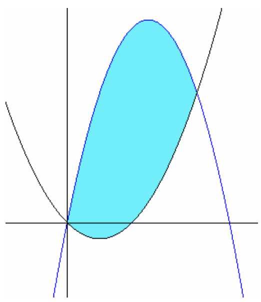
1. Poiché nell'intervallo dato è $\operatorname{sen}^2 x \le \operatorname{sen} x \le x$, risulta $f(x) \le g(x)$; l'area della regione è dunque data da $\int_0^{\pi/4} (g - f)\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\, dx$.



Per quanto riguarda il primo integrale, integrando per parti e poi per sostituzione, si ottiene:
$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{tg} x + \log |\cos x| + c$.

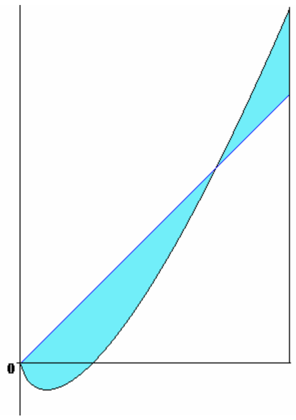
Per il secondo integrale, si ha:
$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c$.
In definitiva, l'area richiesta misura $\frac{\pi}{2} - \frac{\log 2}{2} - 1$.

2. Le due parabole si intersecano in punti di ascissa $x = 0$, $x = 2$. In tale intervallo risulta $g(x) \ge f(x)$: l'area richiesta è dunque data da $\int_0^2 (g - f)\, dx = \ldots = 4$.



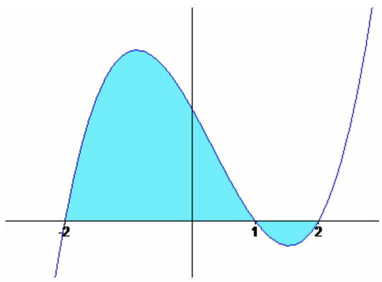
3. Poiché risulta $x \log x > x$ per $x > e$, l'area della regione è data da

$$\int_0^e (x - x \log x)\, dx + \int_e^{3e/2} (x \log x - x)\, dx.$$



Tenendo conto che, integrando per parti, $\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$, per l'area si trova in definitiva il valore $\frac{9\,e^2}{8} \log \frac{3}{2} - \frac{5\,e^2}{16}$.

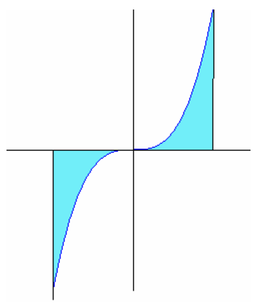
4. Poiché il grafico della funzione $f(x) = (x - 1)(x^2 - 4)$ è quello riportato in figura,



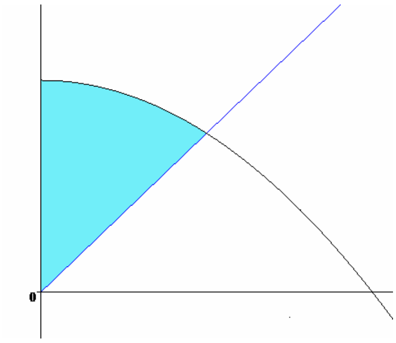
l'area della regione è data da $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx - \int_1^2 f(x)\, dx = \ldots = 71/6$.

3.

1. Il volume richiesto è dato da $2\pi \int_0^3 x^6 \, dx = \frac{4374}{7} \pi$

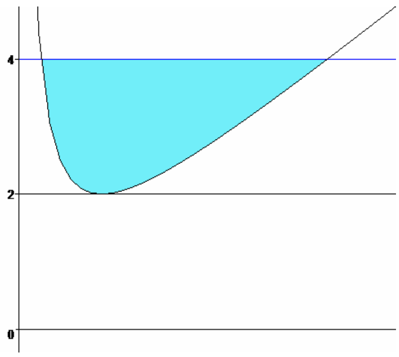


2.



$$\text{Volume} = \pi \int_0^4 \left((4 - x^2)^2 - 9x^2 \right) dx = \frac{158}{15} \pi$$

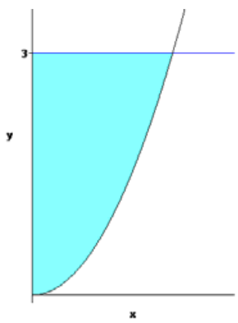
3.



Le due funzioni si intersecano per $x = 2 \pm\sqrt{3}$; trasliamo i due grafici di 2 unità verso il basso , in modo da ricondurci ad una rotazione attorno all'asse delle x . In tal modo il volume è dato da :

$$\pi \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \left((4 - 2)^2 - (x + 1/x - 2)^2 \right) dx = \ldots = 4 \pi \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} .$$

4.



$$\pi \int_0^3 y\, dy = \frac{9}{2}\pi .$$

4.

1. Le soluzioni dell'equazione differenziale nell'intervallo indicato sono le funzioni - log cos x + c. Imponendo la condizione iniziale, si trova che deve essere c = 1 ; in tal modo si ottiene l'unica soluzione y (x) = 1 – log cos x .

2. Le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni $\int_0^x e^{-t^2}\, dt + c$.

   Imponendo la condizione iniziale, si trova che deve essere c = 0 ; in tal modo si ottiene l'unica soluzione $y(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.