Calcolo differenziale – esercizi proposti N. 3

1. Calcolare i seguenti limiti , facendo uso dei principi di sostituzione e – quando serve – del teorema dell'Hôpital . Il risultato è riportato nel testo.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\exp x}{x} = -1$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\exp x}{x} = -1$

3. $\lim_{x\to \pi} \frac{(1+\cos^3 x)(1+\operatorname{sen} x)}{\sqrt{1+\cos x}} = 0$

4. $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}-1}{x^2-4} = +\infty$

5. $\lim_{x\to +\infty} x\left(\operatorname{tg}\frac{2}{x} + \log\frac{x+3}{x}\right) = 5$

6. $\lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\cos x} = 1$

7. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(\sqrt{x})\,(\sqrt{x}-1)}{\log\left(2\sqrt{4x^2-2x+1}+4x-1\right)} = +\infty$

8. $\lim_{x\to e} \left(\frac{1}{\log x} - 1\right)^{x-e} = 1$.

2. Calcolare il limite delle seguenti funzioni per $x \to 0$, facendo uso della formula di Taylor . Il risultato è riportato nel testo.

1. $\frac{\log(1+x^2) - \operatorname{sen}(x^2)}{\cos 2x + \exp(2x^2) - 2} \to -\frac{3}{16}$

2. $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{e^x - 1} \to \frac{1}{2}$

3. $\frac{\sqrt[3]{1+3x} - x - \cos x}{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)} \to -\frac{1}{2}$

4. $\frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} \to 1$

5. $\frac{\log(1-2x^2) + 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{x^4} \to -\frac{5}{3}$

6. $\frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x + x^4}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x} \to \frac{5}{2}$

7. $\frac{3\sqrt[3]{1+\operatorname{sen}^2 x} - 5 + 2\cos x}{\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2/2} \to \frac{14}{3}$

8. $\frac{e^{x+x^2} - e^{x\cos x}}{\log\cos x} \to -2$

3. Usare la formula di Taylor con resto di Lagrange per le seguenti approssimazioni .

1. Approssimare $\sqrt[3]{e}$ con un errore il cui valore assoluto sia minore di 10^{-4} .
Scrivere il polinomio di Taylor con n = 4 per la funzione e^x con $x_0 = 0$; l'approssimazione che si trova è 1,3955761…

2. Approssimare sen ($\pi / 7$) con un errore il cui valore assoluto sia minore di 10^{-3}.
Scrivere il polinomio di Taylor con $n = 3$ per la funzione sen x con $x_0 = 0$; assumere $\pi = 3{,}1415926$; l'approssimazione che si trova è 0,4337327…

4. Provare che le seguenti equazioni hanno una e una sola soluzione $x = \xi$ nell'intervallo indicato ; approssimare la soluzione con due cifre decimali esatte usando il metodo delle tangenti di Newton.

1. $\exp (x^2 - 1) - x = 0$ in $[0 , \frac{1}{2}]$. (R.: $\xi \approx 0.45$)

2. $\log x + 2 x^2 - x = 0$ in $[\frac{1}{2} , 1]$. (R.: $\xi \approx 0.72$)