Calcolo differenziale – soluzioni degli esercizi proposti N. 2

1.

1.	max = $\sqrt{2}$ per $x = \pi / 4$	min = 0 per $x = 3\pi / 4$
2.	max = 1 per $x = \pi / 6$	min = 0 per $x = \pi / 2$
3.	sup = $+\infty$	min = $\sqrt{15} / (8\sqrt{15} - 30)$ per $x = \sqrt{15} - 4$
4.	max = 1 per $x = \pi$	inf = $-\infty$
5.	sup = $+\infty$	min = e per x = e
6.	max = $\pi / 2$ per x = 0 , x = 2	min = 0 per x = 1
7.	max = arctg25 per x = 2	inf = $-\pi / 2$
8.	max = 3 / 2 per $x = \pi / 6$, $x = 5\pi / 6$ ($+ 2k\pi$) min = -3 per $x = 3\pi / 2$ ($+ 2k\pi$)	
9.	sup = 3	min = 0 per x = 1 / 4 , x = 4
10.	max = $3\sqrt{3}$ per x = 3	inf = π

2.

1.	sì ; $\xi = -2/3$	2.	no
3.	sì ; $\xi = -\operatorname{arctg} 1/2$	4.	sì per a = 1 , no per $a \neq 1$; $\xi = -1/2$

3.

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log \cos^3 x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) = \exp\left(3\,\frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right).$$

$$f'(x) = -3\exp\left(3\,\frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\ (\operatorname{sen}^2 x + 3\log\cos x).$$

Limite per $x \to 0^+$

$$3\,\frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx 3\,\frac{\log(1 - x^2/2)}{x^3} \approx 3\,\frac{-x^2/2}{x^3} = -\frac{3}{2x} \to -\infty$$

$$f(x) \to 0$$

Limite per $x \to \pi/2^-$

$$3\,\frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx -3\cos^3 x \log \cos^3 x \to 0$$

(abbiamo sostituito senx con il suo limite -1; inoltre, poiché $\cos x \to 0$, ci riconduciamo a calcolare il limite di $t \log t$ per $t \to 0$; questo è un limite notevole e vale 0)

$$f(x) \to 1 .$$

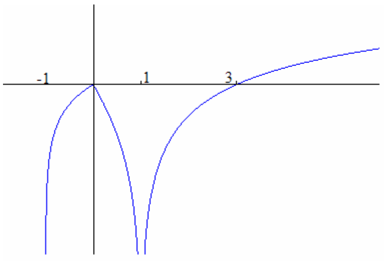
In conclusione, la funzione data può essere prolungata per continuità agli estremi dell'intervallo ; poiché $f(0) \neq f(\pi/2)$, non vale l'ipotesi del teorema di Rolle.

4.

1. no ; $\xi = -1/2$
2. sì ; $\xi = \sqrt{(4-\pi)/\pi}$
3. no ; $\xi = 2 \pm 1/\sqrt{27}$
4. sì ; $\xi = e^{2}/3$

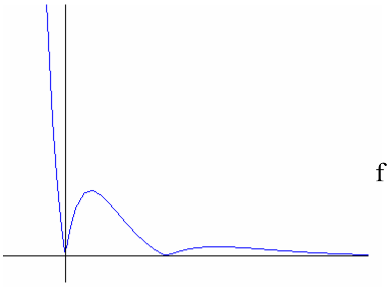
5.

1.



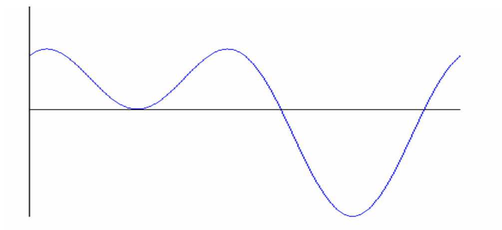
$$f'(x) = \frac{1 + (\operatorname{sgn} x)(x+2)}{\left(|x| - 1\right)(x+1)}$$

2.



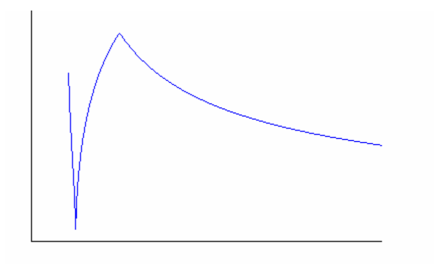
$$f'(x) = 2e^{-2x} \operatorname{sgn}(4x - 3x^2)(3x^2 - 7x + 2)$$

3.

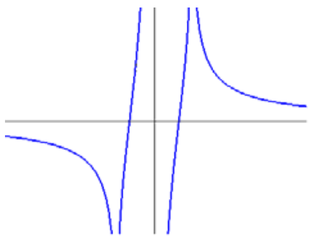


$$f'(x) = \cos x\,(1 - 4\,\mathrm{sen}\,x)$$

4.



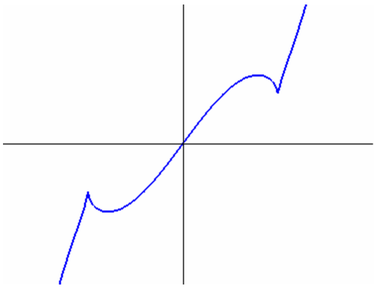
5.



$$f'(x) = \frac{(1-x)\operatorname{sgn}(2x-1)}{x\sqrt{|2x-1|}\sqrt{x^2 - |2x-1|}}$$

$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$$

6.



$$f'(x) = e^{\sqrt{|x^2-1|}}\left\{1 + \frac{x^2 \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}}\right\}$$

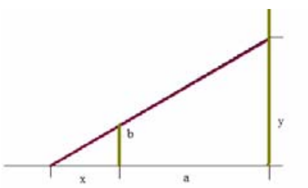
6.

1. Indicata con H la lunghezza (data) dell'ipotenusa e con x quella di uno dei cateti, l'altro cateto misura $\sqrt{H^2 - x^2}$ e dunque l'area è espressa dalla funzione $A(x) = x\sqrt{H^2 - x^2}/2$, con $x \in [0, H]$.
   Il valore massimo si ottiene per $x = H / \sqrt{2}$, in corrispondenza del triangolo isoscele.

2. Scritta la retta nella forma $y = 2 + m(x - 1)$ (con $m < 0$), i punti di intersezione con gli assi sono $((m - 2)/m, 0)$, $(0, 2 - m)$; l'area è data da $A(m) = -(m - 2)^2 / (2m)$, definita per $m < 0$. Il minimo si ottiene per $m = -2$.

3. La circonferenza di base misura x e dunque il raggio di base è $x / 2\pi$. Tenendo conto che $x + y = H$, l'altezza del cilindro vale $H - x$. Il volume è dunque $V(x) = x^2 (H - x) / 4\pi$, con $0 \le x \le H$. Il volume è massimo per $x = 12$.

4. Indichiamo con x la distanza tra il punto di appoggio della trave dal muro e con y l'altezza del punto di appoggio della trave all'edificio. (v. fig.) .



   Dalla similitudine dei triangoli ricaviamo

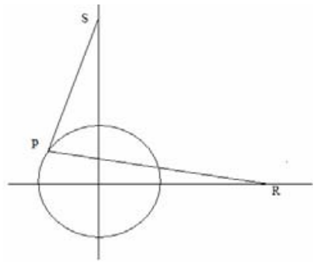
   $y : b = (a + x) : x$ cioè $y = b(1 + a/x)$.

   La lunghezza della trave si ottiene dal teorema di Pitagora :

   $$l(x) = \sqrt{(a+x)^2 + b^2(1 + (a/x))^2} \quad \text{con } x \ge 0 .$$

   La lunghezza è minima per $x = \sqrt[3]{a b^2}$.

5. Il generico punto della semiretta è $P = (x, \sqrt{16 - x^2})$, con $-4 \le x \le 4$.
   La funzione di cui dobbiamo calcolare valore massimo e minimo è data da :

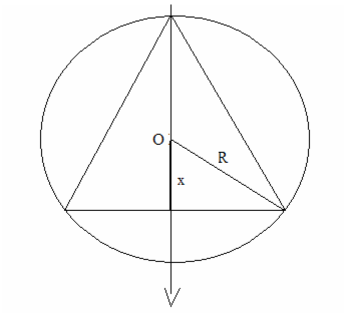


$$S(x) = x^2 + (\sqrt{16 - x^2} - 8)^2 + (x - 8)^2 + 16 - x^2$$

$$= 16(10 - x - \sqrt{16 - x^2})$$

La funzione è minima per $x = 2\sqrt{2}$ (in questo caso P è il punto che sta sulla bisettrice del I quadrante), massima per $x = -4$ (in questo caso $P = (-4, 0)$)

6. Indichiamo con x la distanza con segno dal centro (v. fig.) : x è considerato positivo se la base sta al di sotto del centro ; dunque $-R \le x \le R$.

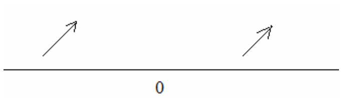


Il solido generato è costituito da due coni con raggio di base $R + x$ e altezza $\sqrt{R^2 - x^2}$. Il volume complessivo è dunque dato da $V(x) = 2\pi(R + x)^2\sqrt{R^2 - x^2}/3$.
Questo è massimo per $x = 2R/3$.

7.

$$x_{n+1} \ge x_n \iff e^{x_n} - 1 \ge x_n$$

Per risolvere la disequazione, possiamo studiare graficamente il segno della funzione $f(x) = e^x - 1 - x$; si trova che questa è sempre positiva, eccetto che per $x = 0$ dove si annulla.



Dunque la successione è crescente ed ha come unico punto fisso 0 .
In conclusione :
se $k = 0$ la successione è costantemente nulla
se $k < 0$ la successione tende a 0 crescendo
se $k > 0$ la successione tende a $+\infty$ crescendo.

8.

La funzione f_1 è definita in $[-1, 1]$; la sua derivata $1 - (1 - x^2)^{1/2}$ è negativa e dunque la funzione è decrescente , condizione che assicura l'invertibilità.
Poiché $f_1(x) = 0$ per $x = 1$, la derivata della funzione inversa in $y = 0$ è l'inverso della derivata della funzione in $x = 1$; però $x = 1$ è un punto a tangente verticale per la funzione e dunque $y = 0$ è un punto a tangente orizzontale per l'inversa ; in altre parole $f_1^{-1}(0) = 0$.
La funzione f_2 è definita in R ; la sua derivata $2 - \text{sen}\, x$ è positiva e dunque la funzione è crescente , condizione che assicura l'invertibilità.

Poiché $f_2 (x) = 1$ per $x = 0$, la derivata della funzione inversa in $y = 1$ è l'inverso della derivata della funzione in $x = 0$: $f_2^{-1} (1) = 1 / 2$.