Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile
27 novembre 2014
Esercizi di preparazione al compitino: seconda parte.

Nota: la seconda parte del compitino durerà circa 1h40' e sarà comosta da due o tre problemi da svolgere **giustificando i passaggi** (utilizzando risultati e teoremi visti a lezione). Risultati privi di giustificazione vengono valutati zero. Di seguito trovate alcuni esempi di problemi.

1. Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:
$$f(x) = \log(\sqrt{|1+x|} + 2x)).$$

2. Sia
$$x_n := \frac{2n-1}{n-2}, \quad n \geq 3.$$
Calcolare, se esistono min, max, inf, sup motivando le risposte. Verificare la risposta dell'inf utilizzando la definizione.

3. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione
$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (\sin\alpha + 2\cos\alpha)^n$$
è tale che $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

4. Risolvere in campo comlesso il sistema
$$\begin{cases} z^2 w = 1 \\ \bar{z}w + z\bar{w} = 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$$

5. Sia $a_n := \sqrt{1+n^2} - n$. Calcolare (se esistenti)
   (i) $\lim_{x\to+\infty} a_n$.
   (ii) $\lim_{x\to+\infty} na_n$.
   (iii) $\lim_{x\to+\infty} n^\alpha a_n$ al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$.

6. Sia $A := \{\sqrt[n]{n} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2\}$. Determinare $\sup A$ ed $\inf A$ giustificando adeguatamente la risposta.

7. Ordinare le seguenti successioni in ordine crescente in base alla velocità di crescita all'infinito:

$$a_n = \sqrt{n+1}, \quad b_n = \log n!, \quad c_n = e^{\sqrt{n}}, \quad d_n = \log(1+n^2).$$

8. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita dalla relazione ricorsiva

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n \end{cases}$$

Calcolare

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

9. Dire per quali valori del parametro reale $a \geq 0$ la successione

$$a_n := n\binom{3n}{n}a^n$$

risulta essere infinitesima.

10. Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero fissato, e si considri l'equazione

$$n(\cos x - 1) + 1 = 0 \tag{1}$$

(i) Mostrare che l'equazione (1) ammette soluzione per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Mostrare che nell'intervallo $(0, \pi)$ esiste un unico valore x_n che soddisfa l'equazione (1).

(iii) Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} x_n, \quad \lim_{n\to+\infty} nx_n$$