Analisi Matematica I

a.a. 2014 - 15

ESERCIZI SUI LIMITI

1. Calcolare i seguenti limiti (a fianco la risposta)

Per $x \to +\infty$	$x^3 - 3x + 1 \to +\infty$	per $x \to 2$	$\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \to 3/4$
per $x \to +\infty$	$x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \to +\infty$	per $x \to 2^+$	$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 4} \to +\infty$
per $x \to -\infty$	$\dfrac{1}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x^2-1}} \to 0^-$	per $x \to +\infty$	$\dfrac{2x^3 + x - 1}{x^3 + 1} \to 2$
per $x \to +\infty$	$\dfrac{\sqrt{2x^3-1} - \sqrt{x^3-1}}{x^2} \to +\infty$	per $x \to -\infty$	$\dfrac{x^2 + 7x + 1}{x + 3} \to -\infty$
per $x \to +\infty$	$\dfrac{x^2 - 25}{2x^3 + 1} \to 0^+$	per $x \to 0^+$	$\dfrac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \to +\infty$
per $x \to 0$	$e^{1/x} \to$ non esiste	per $x \to 5$	$3^{(x-5)/(x^2 - 6x + 5)} \to \sqrt[4]{3}$
per $x \to 3^-$	$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/(x-3)} \to +\infty$	per $x \to 2$	$\dfrac{\log(x^2 - 4)}{x - 2} \to -\infty$
per $x \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\sqrt{x} - \sqrt{x^2-1}} \to +\infty$	per $x \to +\infty$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{(1 - x^2)/x} \to 0$
per $x \to -2$	$x \log(x^2 - 4) \to 0$	per $x \to +\infty$	$\log \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x^4 + 1}} \to 0$
per $x \to 3$	$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} \to 2/5$	per $x \to 0^-$	$\dfrac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} \to -1$
per $x \to 1^+$	$e^{x/(1-x^2)} \to 0$	per $x \to +\infty$	$\dfrac{\log x^2 + 1}{\log x - 1} \to 2$
per $x \to 0$	$\dfrac{\log x^2 + 1}{\log x - 1} \to 2$	per $x \to 0^+$	$\operatorname{arctg}(1/x) \to \pi/2$
per $x \to -\infty$	$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 3} \to 0$	per $x \to 3$	$\dfrac{\sqrt{7 - x} - 2}{2x - 6} \to -1/8$
per $x \to \pi/2^+$	$\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + 1} \to +\infty$	per $x \to +\infty$	$\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x \log x} \to 0.$

2. Utilizzando il principio di sostituzione, calcolare i seguenti limiti (a fianco la risposta)

Per $x \to 0$ $\quad \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^3} \to -1/2$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x + x^2}{x^2} \to 1$

per $x \to 1^{\pm}$ $\quad \dfrac{\exp(2x/(x^2-1))}{(x-1)^2} \to +\infty, 0$

per $x \to -\infty$ $\quad \dfrac{5x + 7 + \log^2 x}{\sqrt{x^2 + 4 + e^x}} \to -5$

per $x \to -\infty$ $\quad \dfrac{x\left(1 + e^{x\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{x^2-4}\,(2 + \operatorname{sen} x)} \to +\infty$

per $x \to +\infty$ $\quad x^x - e^{3x} - x^2 \log x \to +\infty$

per $x \to \dfrac{\pi}{4}$ $\quad (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \to 1/e$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{sen}^2 x} \to 1/2$

per $x \to 1$ $\quad (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)} \to e^{2/\pi}$

per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt[5]{x+4} - \sqrt[5]{x} \to 0$

per $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{\log 2x}{\log 3x} \to 1$

per $x \to +\infty$ $\quad x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} - 1\right) \to -1/2$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x + x^2} \to 1/2$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{\log(2 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \to -1/2$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\, e^x}{x e^x - \log(1+x^2)} \to -1$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{(1 - \cos\sqrt{x})^2 + x^3 + \sqrt{x}\operatorname{sen} x}{x^4 + \operatorname{sen}\left(e^x - \dfrac{1}{1+x}\right)} \to 1$

per $x \to 1$ $\quad (x^2-1)\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \to 0$

per $x \to +\infty$ $\quad (x^2-1)\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \to +\infty$

per $x \to 0$ $\quad (\operatorname{sen} x^2)^{1/\log x} \to e^2$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{e^x - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x + \log(1+x^2)} \to 3/2$

per $x \to 0$ $\quad (1 + x + x^2)^{1/\log(1+x)} \to e$

per $x \to 0$ $\quad \dfrac{a^x - b^x}{x} \to \log(a/b)$

per $x \to 0$ $\quad \left(1 + \dfrac{x}{1-x}\right)^{1/x} \to e$

per $x \to 0$ $\quad (\cos x)^{1/\operatorname{sen}^2 x} \to 1/\sqrt{e}$

per $x \to 0$ $\quad \left(1 - \sqrt{2 - 2\cos x}\right)^{1/\operatorname{sen}|x|} \to e$

per $x \to +\infty$ $\quad \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x} \to 1$

per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt[3]{2 + x^3} - \sqrt[3]{1 + 2x^2 + x^3} \to e$

per $x \to +\infty$ $\quad px + q - \dfrac{x^3+1}{x^2+1} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 1 \\ -\infty & \text{se } p < 1 \\ q & \text{se } p = 1 \end{cases}$

per $x \to 3^+$ $\quad \dfrac{\sqrt{x+1} - 2 + \sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}} \to +\infty$

per $x \to \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \operatorname{tg} x\,(e^{\cos x} - 1) \to 1.$

3. Calcolare il limite delle seguenti successioni al variare del parametro reale x :

$n^x \log\cos(1/n)$ — $-1/2$ per $x = 2$, $-\infty$ per $x > 2$, 0 per $x < 2$

$\dfrac{3^{n^x} - 2^{n^x}}{n^x}$ — $+\infty$ per $x > 0$, 1 per $x = 0$, $\log(3/2)$ per $x < 0$

$n^x(\sqrt[n]{n} - 1)$ — $+\infty$ per $x \geq 1$, 0 per $x < 1$

4. Precisare il tipo di discontinuità che la funzione presenta nel punto indicato :

$f(x) = \dfrac{\log\left(1+\cos\dfrac{\pi x}{4}\right)}{\log(3-x)}$, $x_0 = 2$ (disc. eliminabile)

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, $x_0 = 0$ (disc. I specie)

$f(x) = \dfrac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$, $x_0 = 0$ (disc. I specie)

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 1}{2\operatorname{sen} x - \sqrt{2}}$, $x_0 = \pi/4$ (disc. eliminabile)

5. Precisare la parte principale delle seguenti funzioni per $x \to 0$ (la risposta è indicata a fianco) :

$\dfrac{x\sqrt{x^3 + \operatorname{sen} x}}{\sqrt{x^4+1}\ \operatorname{arcsen}(e^x - 1)} \approx \sqrt{x}$

$\sqrt{x^2(x^2+1)} \approx |x|$

$\dfrac{x\sqrt{\operatorname{tg} x} + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \approx \sqrt{x}$

$\dfrac{\log(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}) + \operatorname{tg} x}{\sqrt[4]{1+x} - e^x} \approx -\dfrac{4}{3\sqrt{x}}$

$\sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5} \approx x^5$

$\dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x + x^5}{(1-\cos x)^2 + 3\operatorname{tg}^2 x} \approx \dfrac{x}{6}$

6. Precisare la parte principale delle seguenti funzioni per $x \to +\infty$ (la risposta è indicata a fianco):

$\dfrac{x^2 + x^4}{1 + x} \approx x^3$

$x^2\left(2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \approx 2x^2$

$x\,e^{-x}$ (non ha parte principale)

$\dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{1 + x e^{-x}} \approx 2x$

$\sqrt[4]{x^2+2} - \sqrt[4]{x^2+1} \approx \frac{1}{4x^{3/2}}$ x log x (non ha parte principale)

7. Precisare la parte principale delle seguenti funzioni per $x \to x_0$ (la risposta è indicata a fianco):

per $x \to \pi/4$ $\quad \mathrm{tg}\, x - 1 \sim 2(x - \pi/4)$

per $x \to 1$ $\quad \log \frac{2x+1}{3x} \sim (1-x)/3$

per $x \to 1$ $\quad x^{1/x} - 1 \sim x - 1$

per $x \to 1/2$ $\quad \mathrm{arcsen}\, x - \pi/6 \sim (2x-1)/\sqrt{3}$