Soluzioni

1.

$f(t) = 1 / \log t$

per $t \to 0$ $\quad f(t) \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile $\to$ integrabile

per $t \to 1$ $\quad f(t) \approx 1/(t-1)$ $\quad \to$ non integrabile

per $t \to +\infty$ $\quad f(t) > 1/t$ $\quad \to$ non integrabile

$F(x)$

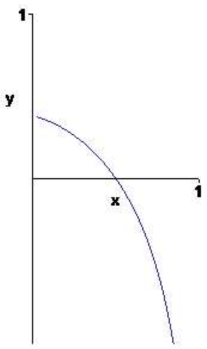
C.E. $\quad [0, 1)$

SGN $\quad$ positiva in $[0, ½)$, nulla in ½, negativa in $(½, 1)$

LIM $\quad$ per $x \to 1^-$ $\quad F(x) \to -\infty$

DRV $\quad 1/\log x < 0$; $F'(0) = 0$

DRV^2 $\quad -1/(x \log^2 x) < 0$



$G(x)$

C.E. $\quad (1, +\infty)$

SGN $\quad$ negativa in $(1, 2)$, nulla in 2, positiva in $(2, +\infty)$

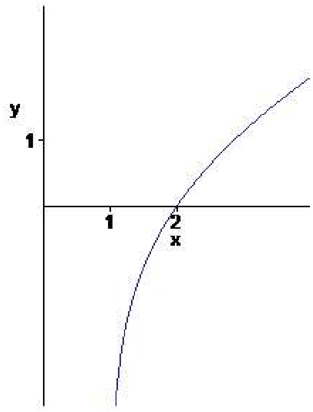
LIM $\quad$ per $x \to 1^+$ $\quad F(x) \to -\infty$

per $x \to +\infty$ $\quad F(x) \to +\infty$

DRV $\quad 1/\log x > 0$

per $x \to +\infty$ $\quad F(x)/x \underset{H.}{=} 1/\log x \to 0$ non c'è asintoto

DRV^2 $-1/(x\log^2 x) < 0$



2.

Soluzioni equazione omogenea : $c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$

Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie: si cerca una soluzione della forma $c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\operatorname{sen} 2x$; calcoliamo le derivate c_1' , c_2' :

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sen} 2x \\ 1/\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}} = -1/2$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\operatorname{sen} 2x & 1/\operatorname{sen} 2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{pmatrix}} = \frac{\cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x}$$

Dunque $c_1 = -x/2$, $c_2 = (\log|\operatorname{sen} 2x|)/4$.

3.

C.E. $x \neq -1$

SGN positiva in $(-\sqrt[3]{2}, -1)$ e in $(0, +\infty)$, negativa in $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ e in $(-1, 0)$, nulla in $-\sqrt[3]{2}$ e in 0.

LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \approx x \to +\infty$

$$f(x) - x = x/(x^3+1) \approx 1/x^2 \to 0$$

Questo prova che y = x è asintoto obliquo e che l'area richiesta tra il grafico e l'asintoto ha area finita

per $x \to -\infty$ $f(x) \approx x \to -\infty$

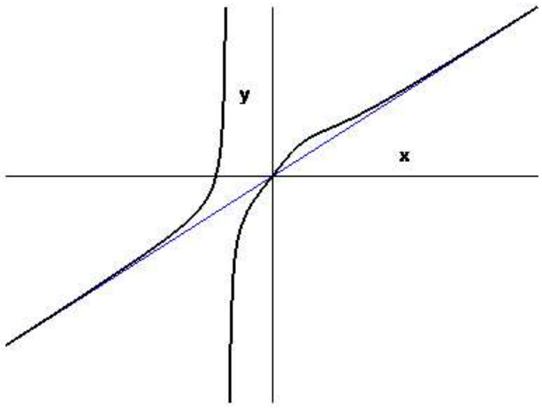
Con lo stesso calcolo precedente si trova che y = x è asintoto

per $x \to -1^{\pm}$ $f(x) \approx x \to \mp\infty$

DRV $f'(x) = (x^6 + 2) / (x^3 + 1)^2 > 0$

DRV^2 $f''(x) = 6x^2(x^3 - 2) / (x^3 + 1)^3$

positiva per $x < -1$ e per $x > \sqrt[3]{2}$.



4.

Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt{4+e^{-n}}}{\sqrt{4+e^{-n-1}}} \left| x^2 - 2 \right| \to \left| x^2 - 2 \right| .$$

La serie :

converge se $\left| x^2 - 2 \right| < 1$ cioè se $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

non converge se $\left| x^2 - 2 \right| > 1$ cioè se $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

per x = ±1 la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4+e^{-n}}}$, per x = ± $\sqrt{3}$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4+e^{-n}}}$;

nessuna delle due serie verifica la condizione necessaria per la convergenza.