[A]

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x + n + 1}$

Criterio del rapporto per serie a segno qualunque.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \; \frac{n^x + n + 1}{(n+1)^x + n + 2}$

$\downarrow$

1

infatti questo rapporto si può approssimare:
se $x > 1$ con $\frac{n^x}{n^x}$
se $x \leq 1$ con $\frac{n}{n}$

Quindi la serie:
per $|x| < 1$ converge; per $x > 1$ diverge; per $x < -1$ è indeterm.
per $x = 1$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ che diverge
per $x = -1$ diventa $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\frac{1}{n} + n + 1}$ che converge per il t. di Leibniz
(infatti $\frac{1}{\frac{1}{n} + n + 1}$ è ovviamente infinitesima e inoltre è decrescente; per provare la seconda affermazione, si fa vedere che $\frac{1}{n} + n + 1$ è crescente provando che la derivata della fz. $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$, cioè $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, è positiva per $x > 1$.

2. $F(x) = \int_0^x e^t |\operatorname{arctg} t| \, dt$

È una fz. derivabile in $\mathbb{R}$ e crescente (la sua derivata è positiva).
La fz. $f(t) = e^t |\operatorname{arctg} t|$ è integrabile in $U(-\infty)$ (perché $e^t < \frac{1}{|t|^\alpha}$ $\forall \alpha$) e non integrabile in $U(+\infty)$ (fz. $\sim \frac{\pi}{2} e^t$ che per $t \to +\infty$ diverge).
Quindi l'immagine di F è una semiretta $(c, +\infty)$.
$F''(x) = (\operatorname{sgn} x) \, e^x \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right)$ $\quad F''(0^\pm) = \pm 1$
Dunque $F(x) = \pm \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e questo basta per dire che 0 è un punto di flesso.

3.
$$\cos x = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K \frac{x^{2K}}{(2K)!} + (-1)^{n+1} \cos\xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Per $x = \frac{\pi}{18}$ $\quad E_n = (-1)^{n+1} \cos\xi \frac{(\pi/18)^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$$|E_n| < \frac{(\pi/18)^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{(0,2)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{2n+2}}{(10)^{2n+2}(2n+2)!} < \frac{1}{10^3}$$

se $\frac{(10)^{2n+2}(2n+2)!}{2^{2n+2}} > 10^3$, che è vera per $n \geq 1$

$\cos\frac{\pi}{18} \sim 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2$ a meno di 10^{-3}

4. $f(x) = (x-1)^2 - x \lg^2 x$

C.E. $\quad x > 0$

LIM $\quad$ per $x \to 0$ $\quad f(x) \to 1$; per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim x^2 \to +\infty$ senza asintoto

$f(1) = 0$

DRV $\quad f'(x) = 2(x-1) - \lg^2 x - 2\lg x$

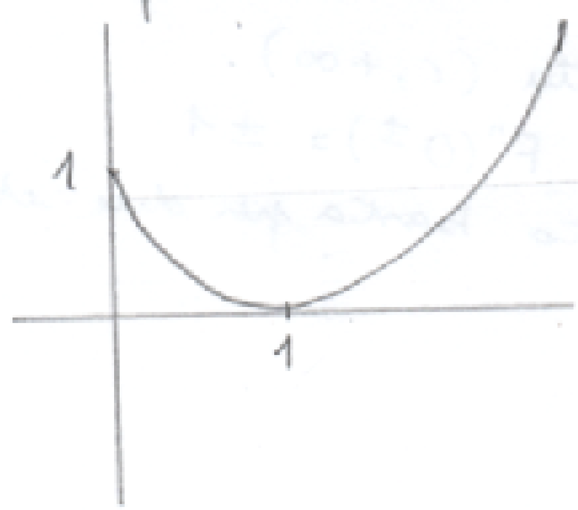
per $x \to 0$ $\quad f'(x) \to -\infty$ $\quad$ pto a tg. verticale

DRV² $\quad f''(x) = \frac{2}{x}(x - \lg x - 1)$

$\varphi(x) = x - \lg x - 1$

$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Questo prova che f'' è positiva e dunque f' è crescente. Poichè $f'(1) = 0$, la derivata è negativa per $x < 1$, positiva per $x > 1$. Inoltre f è convessa



Poniamo $x - 1 = t$ e approssimiamo con $t_0 = 0$

$\lg(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$

$\lg^2(1+t) = t^2 - t^3 + \frac{11}{12}t^4 + o(t^4)$

$(1+t)\lg^2(1+t) = t^2 - \frac{t^4}{12} + o(t^4)$

$t^2 - (1+t)\lg^2(1+t) = \frac{t^4}{12} + o(t^4)$

$$f(x) = \frac{(x-1)^4}{12} + o(x-1)^4$$