Appello #2 [B]

1. Equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{e^x \sqrt{4+e^{-x}}}$$

C.E. $x, y \in R$

SLZ COSTANTI $y = 0$

SLZ NON COSTANTI L'equazione va studiata per $y > 0$ e per $y < 0$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{e^x \sqrt{4+e^{-x}}}$$

$$-\frac{1}{y} = -2\sqrt{4+e^{-x}} + c$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{4+e^{-x}} + c}$$

Soluzioni positive

Deve essere $\sqrt{4+e^{-x}} > -c/2$.

Per $c \geq 0$ la condizione è sempre verificata : $x \in R$.

Per $c < 0$: elevando al quadrato si trova $e^{-x} > (c^2/4) - 4$.

Se $-4 \leq c < 0$, la condizione è sempre verificata : $x \in R$.

Se $c < -4$, deve essere $x < -\log((c^2/4) - 4)$.

Soluzioni negative

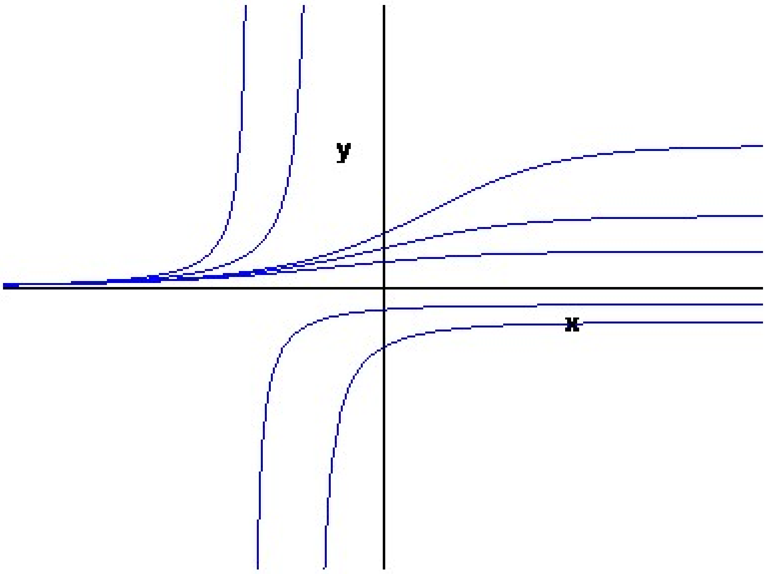
Deve essere $\sqrt{4+e^{-x}} < -c/2$.

Per c ≥ 0 la condizione non è mai verificata .

Per c < 0 : elevando al quadrato si trova $e^{-x} < c^2/4 - 4$.

Se – 2 ≤ c < 0 , la condizione non è mai verificata.

Se c < -2 , deve essere x > $-\log((c^2/4) - 4)$.



2. Funzione

$$f(x) = \frac{\log|x|}{|x|} - x$$

C.E. $x \neq 0$

LIMITI per $x \to 0$ $f(x) \to -\infty$

per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \mp\infty$

la retta y = x è asintoto ; la funzione si avvicina all'asintoto da sopra

DERIVATA $$f'(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|) - x^2}{x^2}$$

Per ottenere il segno della derivata , occorre ricavare graficamente quello della funzione al numeratore.

$\phi(x) = (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|) - x^2$

per $x \to 0^{\pm}$ $\quad \phi(x) \to \pm\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\quad \phi(x) \to -\infty$

$\phi(1) = 0$

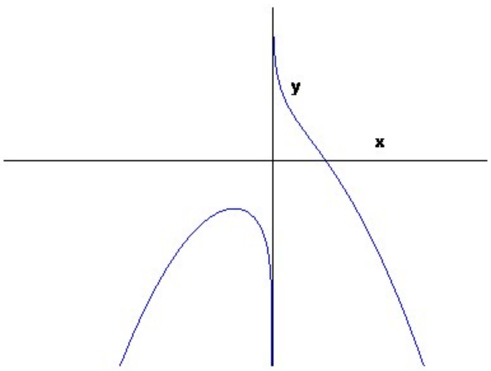
$$\phi'(x) = \frac{-2x^2 - \operatorname{sgn} x}{x}$$

segno di $\phi'(x)$

```
————————0 - - - X - - - - -
___________________________
        a       0
```

$a = -1/\sqrt{2}$

grafico di $\phi(x)$



SEGNO DERIVATA $f'(x)$

```
– – – X ———— 0   – –
____________________
      0      1
```

DERIVATA SECONDA

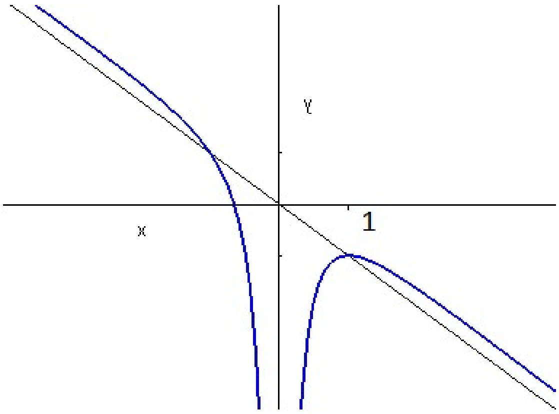
$$f''(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(2\log|x| - 3)}{x^3}$$

SEGNO DERIVATA SECONDA f” (x)

———0— — -X- — — -0———

——————————————————

$-e^{3/2}$ 0 $e^{3/2}$



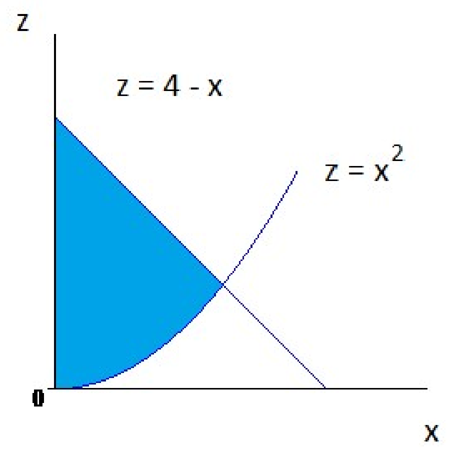
Nell’intervallo (-∞ , 0) la funzione è decrescente, dunque iniettiva.

Poiché f (- e) = e + (1 / e) , la derivata richiesta è 1 / f’ (- e) = -1.

3. Volume

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

La regione si ottiene ruotando attorno all’asse delle z il dominio sotto indicato :



$$\text{Volume} = \int_0^{(\sqrt{17}-1)/2} 2\pi x\,(4 - x - x^2)\,dx = \ldots\ldots$$

4. Serie

Usando il criterio del rapporto è immediato verificare che il raggio di convergenza della serie di potenze è 3/2; inoltre per il criterio di Leibnitz la serie converge in 3/2; non converge invece in -3/2 , perché in questo caso si riduce ad una serie armonica.

Applicando il teorema di derivazione per serie, otteniamo che F' (x) è definita da una serie geometrica :

$$F'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{3^{k-2}}{2^{k-1}} x^{k-1} = -\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{3}{2}x\right)^{k-1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{2}x\right)^{m} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}x} - 1\right) = \frac{x}{2+3x} \quad .$$

Integrando, si ottiene F (x) = $\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\log\left|2+3x\right| + c$, Ma essendo F (x) somma della serie di partenza, è facile vedere che F (0).

Questo si ottiene per c = (2 / 9) log2 e dunque F (x) = $\frac{x}{3} - \frac{2}{9}\log\left|1+\frac{3}{2}x\right|$.