Analisi Matematica I - Prova scritta #2 del 6.7.2020 [A]

1.

Risolvere l'equazione differenziale $y' = \dfrac{y^2}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}}$, precisando gli intervalli in cui sono definite le soluzioni e tracciandone il grafico in qualche caso.

2.

Studiare la funzione $f(x) = x + \dfrac{\log|x|}{|x|}$.

Il segno della funzione e quello della derivata non possono essere studiati per via algebrica: il primo si può dedurre alla fine dello studio della funzione, l'altro deve essere studiato per via grafica..

Osservato che la funzione f (x) ristretta all'intervallo x > 0 è invertibile, calcolare la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y_0 = e + (1/e)$.

3.

Le condizioni $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4 - x^2 - y^2$ individuano un solido di rotazione di cui si chiede di calcolare il volume.

4.

Determinare il raggio di convergenza R ed il comportamento al bordo della serie di potenze $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{2^{k-2}}{3^{k-1}} \dfrac{x^k}{k}$.

Indicata con F (x) la somma della serie (per | x | < R) , scrivere la serie di potenze che definisce F' (x) ; calcolare esplicitamente la somma di quest'ultima serie ed utilizzare il risultato ottenuto per determinare l'espressione analitica di F (x).