Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Correzione della parte II.B del compitino 17dic2014.

Es. 1.
Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da

$$x_0 = 8, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2}{4} + 2}$$

.

(i) calcolare l'estremo inferiore e superiore della successione, specificando se si tratta di massimo e minimo;

(ii) Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

La funzione $f(x) := \sqrt{\frac{x^2}{4} + 2}$ (che definisce la ricorsione) ha le proprietà seguenti:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari;

(b) f è strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$;

(c) $f(x) \geq f(0) = \sqrt{2} > 0$;

(d) posto $c := \sqrt{8/3}$ si ha che $f(x) > x$ se $x \in [0, c)$, $f(c) = c$ e $f(x) < x$ per $x \in (c, +\infty)$;

(e) $f : (c, +\infty) \to (c, +\infty)$.

Le proprietà (a), (b), (c) sono di immediata verifica, la proprietà (d) segue da un semplice conto mentre la proprietà (e) è conseguenza della (c):

$$x > c \;\Rightarrow\; f(x) > f(c) = c.$$

Sappiamo che $x_{n+1} = f(x_n)$; e visto che $f : (c, +\infty) \to (c, +\infty)$ e $x_0 = 8 \in (c, +\infty)$ possiamo facilmente dimostrare per induzione che

$$x_n \in (c, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Questo, insieme alla proprietà (d), implica che $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$, cioé x_n è strettamente decrescente. Ne segue che $x_n \leq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, e dunque

$$\sup\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \max\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = x_0 = 8.$$

D'altronde x_n non ha minimo (perché x_n è strettamente decrescente) inoltre, posto $\ell := \inf\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ si ha che $\ell \geq c$ (perché da (1) segue che c è un minorante) e $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$ (perché una successione monotona decrescente converge al proprio estremo inferiore). Ma, per la continuità della funzione f il limite ℓ deve essere un punto fisso per f, cioé

$$f(\ell) = \ell.$$

Per la proprietà (d) l'unico valore positivo che soddisfa questa equazione è $\ell = c = \sqrt{8/3}$; pertanto

$$\inf\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{8/3}.$$

Es. 2.
Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3+x} - \cos\sqrt{\sin x + x}}{x(\log\sin(4x) - \log(3x))}$$

Sottraendo e sommando 1 al numeratore possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^3+x} - \cos\sqrt{\sin x + x}}{x(\log\sin(4x) - \log(3x))} &= \frac{[e^{x^3+x} - 1] + [1 - \cos\sqrt{\sin x + x}]}{x(\log\sin(4x) - \log(3x))} \\ &= \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)}\end{aligned}$$

dove

$$f(x) := e^{x^3+x} - 1, \quad g(x) := 1 - \cos\sqrt{\sin x + x}, \quad h(x) := x(\log\sin(4x) - \log(3x)).$$

Osserviamo ora che per $x \to 0^+$ si ha che

$$f(x) = e^{x^3+x} - 1 \sim x^3 + x \sim x,$$

$$g(x) = 1 - \cos\sqrt{\sin x + x} \sim \frac{(\sqrt{\sin x + x})^2}{2} = \frac{\sin x + x}{2} \sim x$$

D'altra parte per $x \to 0^+$ si ha anche

$$h(x) = x(\log\sin(4x) - \log(3x)) = x\log\frac{\sin(4x)}{(3x)} \sim x\log\frac{4}{3}$$

Per il principio di sostituzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\log\frac{4}{3}} = \frac{1}{\log\frac{4}{3}}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\log\frac{4}{3}} = \frac{1}{\log\frac{4}{3}}$$

Quindi, per il teorema del limite della somma, il limite di partenza vale $\frac{2}{\log\frac{4}{3}}$.

Es. 3.
Si consideri la successione

$$x_n := \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$$

(i) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

(ii) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n x_n$$

.

(i) Possiamo riscrivere la quantità tra parentesi nel modo seguente

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{-2n}{n+1}.$$

Posto $a_n := \frac{-2n}{n+1}$ riscriviamo x_n nella maniera seguente

$$x_n := \left[\left(1+\frac{1}{n}a_n\right)^n\right]^n$$

Ricordiamo che, se $a_n \to a^* \in \mathbb{R}$ allora $(1+\frac{1}{n}a_n)^n \to e^{a^*}$; pertanto usando questo principio possiamo concludere che la quantità all'interno delle parentesi quadre converge ad $\exp(-2) < 1/4$, di conseguenza sarà definitivamente più piccola di $1/4$. Quindi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dunque $x_n \to 0$.

(ii) Procedendo come al punto precedente scriviamo

$$3^n x_n := \left[3\left(1+\frac{1}{n}a_n\right)^n\right]^n \tag{2}$$

In questo caso la quantità tra parentesi quadre converge a $\frac{3}{e^2} < 3/4$. Possiamo quindi concludere che la quantità che compare in (2) tra parentesi quadre ten sarà definitivamente minore di $3/4$ e di conseguenza

$$3^n x_n \leq (3/4)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} 3^n x_n = 0$.